

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

1. Woche – Eigenwerte / Eigenvektoren / Kegelschnitt

A1 Weltformel für diagonalisierbare Matrizen: $A = S\Lambda S^{-1}$ ($\Lambda := D$ aus 7.53)

Betrachtet wird die lineare Abbildung $\underline{y} = A\underline{x}$. Gegeben sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Matrix A . Bitte alles Folgende auch skizzieren!

(a) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{v}^1$ des Vektors \underline{v}^1 an.

(b) Geben Sie das Bild $\underline{y} = A\underline{x}$ des Vektors $\underline{x} = 1 \cdot \underline{v}^1 + 3 \cdot \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ an.

(c) Geben Sie die Matrix A an.

Z A2 LGS - EW/EV - für fortgeschrittene Studenten

Schreiben Sie die Gleichung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$ (*) als lineares Gleichungssystem in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (**) \quad (\text{s. Bem. 7.13})$$

Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt = 0 ?), dass (*) und damit auch (**) die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (***)$$

hat. Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (***) über den Rang der Koeffizientenmatrix M (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?

Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (***) über mindestens einen Eigenwert von M ? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!

Z A3 Kegelschnitt Hyperbel

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ (1) wird Hyperbel genannt.

Bei Kegelschnitten wird jedoch bei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2) von einer Hyperbel gesprochen.

Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

- Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!
- Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für x' und y' ein.
- Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix S als Spalten eingetragen:
 $\underline{x}_{\text{alt}} = S \cdot \underline{x}_{\text{neu}}$ (3) (analog $\underline{x} = S\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = S^T\underline{x}$, wenn S orthogonal, vgl. 7.57 (bzw. 7.61 $\underline{y} = Q^T\underline{x}$ oder 7.63 $\underline{y} = A\underline{x} \dots$)).
- Es gilt $\underline{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\underline{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Geben Sie mit Hilfe von (3) x und y als Funktion von x' und y' an.
- Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Geben Sie a und b an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

A4 Kegelschnitt grafisch

Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:

$x^2 - y^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 1$, $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$, $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (Asymptote mit zeichnen)

A5 Orthogonale Matrix

Geben Sie für die Matrix $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse Q^{-1} , ihre Transponierte Q^T sowie $Q^T \cdot Q$ an. Ist Q eine orthogonale Matrix, d.h. bilden ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis (ONB) ?

A6 Kompl. EW - Drehung

Betrachtet wird die Abbildung $\underline{y} = A \cdot \underline{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Geben Sie das Bild des Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).
- Berechnen Sie nun die Eigenwerte der Matrix A .
- Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).
- Schreiben Sie A als Element von $C = \{aE + bI : a, b \in \mathbb{R}\}$ s. Bsp. 7.12.
Wie hängen a und b mit den Eigenwerten zusammen und wie lautet die zu A gehörige komplexe Zahl z ?
- Modifizieren Sie A so, dass durch die Abbildung $\underline{y} = A_{\text{neu}} \cdot \underline{x}$ nur eine Drehung (und keine Streckung) realisiert wird (s. ggf. 7.63 oder 7.66).