Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

2. Woche – Stetigkeit, partielle Ableitungen und 'Wann gilt Satz von Schwarz?'

A1 **Stetig in** $(x, y) = (0, 0)$ **?**
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$u = \begin{cases} \frac{x\,y\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \frac{x^6+9\,x^4\,y^2-9\,x^2\,y^4-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^3}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ ?, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(0, 0)$, indem Sie

(a) Polarkoordinaten nutzen: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und
(b) den Grenzwert $\lim_{r\to 0}$ betrachten und
(c) evtl. den Grenzwert $\lim_{r\to 0}$ für $\varphi = 0$ sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ betrachten.

A2 **fröhliches Ableiten**
Überzeugen Sie sich, dass für u aus Aufgabe 1

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u = v \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

gilt (Satz von Schwarz).

A3 **fröhliches Ableiten** $\Rightarrow$ **Huch?!** (weiter mit u aus Aufgabe 1)

(a) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}u$ für $x = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \ldots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, y)$.
(b) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}u$ für $y = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \ldots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$.
(c) Geben Sie ((a) und (b) nutzend) $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}u(0, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(0, 0)$ an. Warum gilt hier der Satz von Schwarz nicht?