

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

2. Woche – Stetigkeit, partielle Ableitungen und 'Wann gilt Satz von Schwarz?'

A1 **Stetig in** $(x, y) = (0, 0)$?

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen

$$u = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ ?, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in $(0, 0)$, indem Sie

- (a) Polarkoordinaten nutzen: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und
- (b) den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ betrachten und
- (c) evtl. den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0}$ für $\varphi = 0$ sowie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ betrachten.

Lösung: u ist stetig, v nicht!

A2 **fröhliches Ableiten**

Überzeugen Sie sich, dass für u aus Aufgabe 1

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = v \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

gilt (Satz von Schwarz).

Lösung

$$u = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} + \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u &= \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4y^2(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{y(8x^2y - 4y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u &= \frac{4x^2(-x^4 + 4x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x(8xy^2 - 4x^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

A3 fröhliches Ableiten \Rightarrow Huch?! (weiter mit u aus Aufgabe 1)

- (a) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}u$ für $x = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}u(0, y)$.
- (b) Geben Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}u$ für $y = 0$ an: $\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \dots$ und berechnen Sie daraus $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}u(x, 0)$.
- (c) Geben Sie ((a) und (b) nutzend) $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}u(0, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}u(0, 0)$ an. Warum gilt hier der Satz von Schwarz nicht?

Lösung

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{x=0} = -y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{y=0} = x$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}u(0, 0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}u(0, 0)$$

Der Satz von Schwarz gilt selbstverständlich immer. Nur ist hier eine seiner Voraussetzungen nicht erfüllt: die zweite(n) partiellen Ableitungen sind in $(0, 0)$ nicht stetig, s. 1.