

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante + Abi-Know-How = 2fach Integral

A1 Ein Kreiskegel wird vermessen und der Radius $r = 5\text{cm}$ und die Höhe $h = 6\text{cm}$ mit einem jeweiligen maximalen relativen Fehler von 1.5% bestimmt.

Wie groß ist der maximale absolute sowie prozentuale Volumenfehler?

Hinweis: $\text{Volumen}(\text{Zylinder}) = 3 \cdot \text{Volumen}(\text{Kreiskegel})$

A2 Kugelkoordinaten - warm up

- (a) Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten (Bsp 8.29) mit $r = \text{konstant}$ beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel φ und θ (in der VL ψ) durchlaufen.
- (b) Welche Flächen werden durch $\varphi = \text{konstant}$ (r, θ beliebig) bzw. $\theta = \text{konstant}$ (r, φ beliebig) beschrieben?

A3 Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

- (a) Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im \mathbb{R}^3 die Richtungen vor, in denen r bzw. φ bzw. θ zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$ (s. Bsp 8.29) - sind diese orthogonal zueinander?
- (b) Rekapitulieren Sie die Determinante einer 3×3 -Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?
- (c) Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. Bsp 8.31.

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?

A4 Zusatz: Jacobi-Matrix zur Linearisierung in der Regelungstechnik

In einer Regelungstechnik-Aufgabe werden Sie (bei der Betrachtung eines im Magnetfeld schwebenden Körpers) zur Linearisierung¹ der Funktion

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \frac{k}{m} \frac{u^2}{(x_1 + k_{\text{Fe}})^2} \end{pmatrix}$$

folgende Jacobi-Matrizen benötigen:

$$A(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2)} \quad \text{und} \quad b(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}$$

¹Das lernen Sie noch.

Bestimmen Sie A, b allgemein und an der Stelle $(x_1, x_2, u) = (x_1^0, 0, \sqrt{\frac{mg}{k}}(x_1^0 + k_{\text{Fe}}))$.
 Hinweis: A und b sind Teilmatrizen der 'Gesamt'-Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x_1, x_2, u)}$.
 m, g, k, k_{Fe} und x_1^0 sind Konstanten.

A5 Zusatz: Anwendung Gradient - Richtungsableitung

Den Anstieg einer skalaren Größe U in einer bestimmten Richtung \underline{a} nennt man **Richtungsableitung**. Sie wird wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{a}} = \frac{1}{|\underline{a}|} \underline{a}^T \text{grad } U = \underline{e}_a^T \text{grad } U \quad (*)$$

Wäre U die geografische Höhe und \underline{a} die Richtung eines Wanderweges auf der Landkarte, entspräche $\frac{\partial U}{\partial \underline{a}}$ dem Anstieg des Wanderweges.

Vollziehen Sie die Richtungsableitung (Normalenableitung) in [TET Folie 102](#) nach.

A6 Fläche als Einfach- und Zweifach-Integral

Machen Sie sich klar, dass Ihr Abitur-Know-How zur Berechnung der **Fläche** unter einer Kurve

$A = \int_a^b f(x) dx$ letztendlich gleich einem Zweifachintegral (Def. 9.1) von $f(x, y) = 1$ über den Bereich $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$ ist. Also

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1 dy dx$$

Damit ist auch klar, dass die Berechnung eines **Volumens** gleich einem Dreifachintegral 'über 1' ist, vgl. Normalbereich im \mathbb{R}^3 (Def. 9.1):

$$V = \iiint_{\Omega} f(x, y) dy dx = \iiint_{\Omega} \int_0^{f(x,y)} 1 dz dy dx$$