Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

3. Woche – Kugelkoordinaten, Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante

A1 Ein Kreiskegel wird vermessen und der Radius $r = 5$cm und die Höhe $h = 6$cm mit einem jeweiligen maximalen relativen Fehler von 1.5% bestimmt.

Wie groß ist der maximale absolute sowie prozentuale Volumenfehler?
Hinweis: Volumen(Zylinder) = 3·Volumen(Kreiskegel)

A2 Kugelkoordinaten - warm up

(a) Eine Kugeloberfläche wird in Kugelkoordinaten (VL 8.28) mit r =konstant beschrieben. Geben Sie den Bereich an, den die (Kugelkoordinaten-)Winkel φ und θ (in der VL ψ) durchlaufen.

(b) Welche Flächen werden durch φ =konstant (r, θ beliebig) bzw. θ =konstant (r, φ beliebig) beschrieben?

A3 Jacobi-Matrix Kugelkoordinaten, Funktionaldeterminante

(a) Stellen Sie sich an einem beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^3$ die Richtungen vor, in denen r bzw. φ bzw. θ zunehmen. Sind diese Richtungen orthogonal zueinander? Vergleichen Sie mit den Spalten der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(r, \varphi, \theta)$ (s. VL 8.28) - sind diese orthogonal zueinander?

(b) Rekapitulieren Sie die Determinante einer 3×3-Matrix als Spatprodukt = Volumen des aus den Vektoren aufgespannten Spats. Was für ein Volumen erwarten Sie bei orthogonalen Vektoren (als Funktion der Beträge der Vektoren)?

(c) Vergleichen Sie das Produkt der Beträge der Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix mit der Funktionaldeterminante, s. VL 8.29.

Zusatz: Spannen die Spalten der Jacobi-Matrix in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf (passen auf Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand)?

A4 Jacobi-Matrix zur Linearisierung in der Regelungstechnik

In einer Regelungstechnik-Aufgabe werden Sie (bei der Betrachtung eines im Magnetfeld schwebenden Körpers) zur Linearisierung[1] der Funktion

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \dfrac{k}{m} \dfrac{u^2}{(x_1 + k_{\mathrm{Fe}})^2} \end{pmatrix}$$

folgende Jacobi-Matrizen benötigen:

$$A(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1, x_2)} \quad \text{und} \quad b(x_1, x_2, u) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}$$

Bestimmen Sie A, b allgemein und an der Stelle $(x_1, x_2, u) = (x_1^0, 0, \sqrt{\frac{mg}{k}}(x_1^0 + k_{\mathrm{Fe}}))$.
Hinweis: A und b sind Teilmatrizen der 'Gesamt'-Jacobi-Matrix $J_{\boldsymbol{f}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x_1, x_2, u)}$.
m, g, k, k_{Fe} und x_1^0 sind Konstanten.

[1] Das lernen Sie noch.