

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen) 5. Woche – Div und rot in EMF und Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Kurvenintegral 1. Art

Z A1 Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\underline{\gamma}(t) = \underline{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $d\underline{s} = d\underline{x} = J_{\underline{\gamma}}(t) dt = \underline{\gamma}'(t) dt$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art (skalares Kurvenintegral, z.B. Bogenlänge)

$$ds = \|d\underline{x}\| = \|J_{\underline{\gamma}}(t)\| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Ermitteln Sie ds für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dabei sei $r(\varphi)$ eine gegebene Funktion.

- Geben Sie $\underline{\gamma}'(\varphi)$ an (Produktregel verwenden).
- Ermitteln Sie $\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|$.
- Geben Sie $ds = |d\underline{x}|$ an und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (ca. S. 129 bzw. 148).
- Verwenden Sie diese Formel zur Berechnung der Bogenlänge in Polarkoordinaten in der Aufgabe 2/22.2. :-)

Z A2 Gegeben f_x, f_y Gesucht $f(x, y)$

Gegeben ist das Gradientenfeld $\text{grad } f(x, y) = (f_x, f_y)^T$. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen, VL 9.29, erfüllt sind, und ermitteln Sie jeweils die zugehörige Funktion $f(x, y)$:

- $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x$.
- $f_x = 2x + y, f_y = x + 2y$.

A3 Umlaufintegral

Geben Sie für das Beispiel 9.32 den Wert des Integrals an, wenn der Integrationsweg

$$\underline{\gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ 2 + \sin \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0, 2\pi]$$

ist (Begründung).

Rotation und Divergenz vom elektrischen Feld bzw. \underline{D} -Feld

A4 Zusatz: Welche Auswirkungen hat die Rotationsfreiheit auf die Berechnung des vektoriiellen Kurvenintegrals über diese Felder? Überlegen Sie sich, bei welchen Aufgaben in *Elektrische und magnetische Felder* Sie diese Eigenschaft nutzen können.

A5 Zusatz: Skizzieren Sie die Verschiebungsflussdichte \underline{D} um eine geladene Kugel. In welchem Gebiet gilt $\text{div} \underline{D} = 0$ und wo gilt $\text{div} \underline{D} \neq 0$.