Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291) **inkl. Lösung**

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
5. Woche – Div, grad, rot in EMF und Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Div, grad, rot in elektrischen und magnetischen Feldern

A0 Machen Sie sich die Rechenregel rot grad$f = \underline{0}$ mit Hilfe des Satzes von Schwarz klar.

Lösung:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \underline{0}$$

A0 Da für jedes Feld $\underline{F}$ die Regel $\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{F} = 0$ gilt, ist z.B. $\operatorname{div}\underline{B} = 0$ garantiert, wenn $\underline{B} = \operatorname{rot}\underline{F}$.
Formulieren Sie den analogen Satz für $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \underline{0}$.

Lösung: Da für jedes Feld f die Regel $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \underline{0}$ gilt, ist z.B. $\operatorname{rot}\underline{E} = \underline{0}$ garantiert, wenn $\underline{E} = \operatorname{grad} f$ bzw. wie in EMF $\underline{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

Z A3 **quellenfrei: Divergenz**$= 0$ **und wirbelfrei: Rotation**$= \underline{0}$
Sie lernen in der Lehrveranstaltung *Elektrische und magnetische Felder* das stationäre elektrische Strömungsfeld (Kap. 2), das elektrostatische Feld (Kap. 3) und das allgemeine elektromagnetische Feld (Kap. 4) kennen. Sie finden die Gleichungen des allgemeinen elektromagnetischen Feldes, die Maxwellschen Gleichungen, hier: Zusammenfassung EMF.

(a) Machen Sie sich zunächst für das allgemeine elektromagnetische Feld klar, für welche der Felder, $\underline{H}, \underline{B}, \underline{E}, \underline{D}$ immer gilt: Divergenz$= 0$ bzw. Rotation$= \underline{0}$.

(b) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das stationäre Strömungsfeld, also für $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} =$ konstant. (Außerdem gilt: $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$.)

(c) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das elektrostatische Feld, also für $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$, somit $\underline{J_K} = 0$. (Außerdem gilt: $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$.)

Nutzen Sie 2., um sich klar zumachen, in welchen Fällen (a-c) $\underline{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ gilt und in welchen nicht.

Lösung: s. unten in Blau

Allg. elektromagn. Feld Maxwellsche Glgn.	Stationäres Strömungsfeld $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} =$ konstant	Elektrostatisches Feld $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$
$\operatorname{rot}\underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_K}$	$\operatorname{rot}\underline{H} = \underline{J_K}$	$\operatorname{rot}\underline{H} = \underline{0}$
$\operatorname{rot}\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot}\underline{E} = \underline{0}$	$\operatorname{rot}\underline{E} = \underline{0}$
$\operatorname{div}\underline{D} = \rho$	$\operatorname{div}\underline{D} = \rho$	$\operatorname{div}\underline{D} = \rho$
$\operatorname{div}\underline{B} = 0$	$\operatorname{div}\underline{B} = 0$	$\operatorname{div}\underline{B} = 0$

In den Fällen mit $\operatorname{rot}\underline{E} = \underline{0}$, also (b) und (c) kann $\underline{E}$ ein Potential φ zugeordnet werden. Sobald der Strom nicht konstant ist, also auch das Magnetfeld zeitabhängig ist, ist $\operatorname{rot}\underline{E} \neq \underline{0}$ und somit $\underline{E}$ kein Gradientenfeld, Fall (a).

Kurvenintegral 1. Art

Z A4 Kurvenintegral in Polarkoordinaten

Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\underline{\gamma}(t) = \underline{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $\mathrm{d}\,\underline{s} = \mathrm{d}\,\underline{x} = J_\gamma(t)\,\mathrm{d}\,t = \underline{\gamma}\prime(t)\,\mathrm{d}\,t$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art (skalares Kurvenintegral, z.B. Bogenlänge)

$$\mathrm{d}\,s = \|\,\mathrm{d}\,\underline{x}\| = \|J_\gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Ermitteln Sie $\mathrm{d}\,s$ für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dabei sei $r(\varphi)$ eine gegeben Funktion.

(a) Geben Sie $\underline{\gamma}\prime(\varphi)$ an (Produktregel verwenden).

(b) Ermitteln Sie $\|\underline{\gamma}\prime(\varphi)\|$.

(c) Geben Sie $\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\underline{x}|$ an und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (ca. S. 129 bzw. 148).

(d) Verwenden Sie diese Formel zur Berechnung der Bogenlänge in Polarkoordinaten in der Aufgabe 2/22.2. :-)

Lösung:

(a)

$$\underline{\gamma}\prime(\varphi) = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(b)

$$\|\underline{\gamma}\prime(\varphi)\| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

(c)

$$\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\underline{x}| = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\,\varphi$$