Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
6. Woche Kurvenintegral und Oberflächenintegral (in EMF)

Z A1 Gegeben f_x, f_y Gesucht $f(x, y)$

Gegeben ist das Gradientenfeld $\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x, f_y)^T$. Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingungen, VL 9.29, erfüllt sind, und ermitteln Sie jeweils die zugehörige Funktion $f(x, y)$:

(a) $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y,\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x.$

(b) $f_x = 2x + y,\ f_y = x + 2y.$

A2 Umlaufintegral

Geben Sie für das Beispiel 9.32 den Wert des Integrals an, wenn der Integrationsweg

$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 2 + \sin\lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in [0, 2\pi]$$

ist (Begründung).

A3 Ebene 2D-Funktionaldeterminate $= \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$

Betrachten Sie noch einmal das 2-dimensionale Bereichsintegral in Aufgabe 2/20.9 d, s. Übung 4, z.B. mit $f(P) = 1$ (also Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches).

(a) Beschreiben Sie den Bereich in geeigneten Polarkoordinaten?

(b) Überzeugen Sie sich, dass die laut Satz 9.9 bei Koordinatentransformation **ebener** Bereiche zu verwendende Funktionaldeterminante nichts anderes als $\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|_2$ der Parametrisierung (möglicherweise) **gekrümmter** Bereiche ist, s. Def 9.36.

(c) Wiederholen Sie b) für elliptische Koordinaten (Aufgabe 2/20.19)

Z A4 Flächenintegral 2. Art in EMF

Im Fach 'Elektrische und magnetische Felder' lösen Sie Oberflächenintegrale 2. Art

$$I = \iint \underline{J} \cdot \mathrm{d}\,\underline{A} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \iint \underline{B} \cdot \mathrm{d}\,\underline{A}$$

$\mathrm{d}\,\underline{A} = \underline{n}\,\mathrm{d}\,A$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der betrachteten Fläche steht. Dabei wird meist genutzt, dass die Flussgröße $(\underline{J}, \underline{B})$ senkrecht zur (sinnvoll gewählten) Fläche ist, z.B.:

$$\iint \underline{J} \cdot \mathrm{d}\,\underline{A} \underset{\underline{J}\|\mathrm{d}\,\underline{A}}{=} \iint J\,\mathrm{d}\,A \quad \text{mit } J = |\underline{J}| \text{ und } \mathrm{d}\,A = |\mathrm{d}\,\underline{A}|$$

Ermitteln Sie $\mathrm{d}\,\underline{A}$ und $\mathrm{d}\,A$ für die Aufgaben 1.14, 1.15 und 3.19 aus dem EMF-Übungsheft nach den Regeln der Kunst (VL 9_6), indem Sie

(a) die Fläche durch 2 (Lauf-)Parameter beschreiben $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$

(b) per Kreuzprodukt aus den beiden zur Fläche tangentialen Vektoren den Vektor senkrent zur Fläche ermitteln $\mathrm{d}\,\underline{A} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$

(c) sich überzeugen, dass dieses $\mathrm{d}\,\underline{A}$ tatsächlich parallel zur Flussgröße ist und

(d) den Betrag $\mathrm{d}\,A = |\mathrm{d}\,\underline{A}|$ betrachten, bis Sie 'sehen', dass er gleich den in EMF gebrauchten 'Abkürzungen' ist, nämlich für

i. Aufgabe 1.14: $\mathrm{d}\,A = b\,\mathrm{d}\,r$

ii. Aufgabe 1.15: $\mathrm{d}\,A = 2\pi r\,\mathrm{d}\,r$ bzw.

iii. Aufgabe 3.19: $\mathrm{d}\,A = h\,\mathrm{d}\,r$.

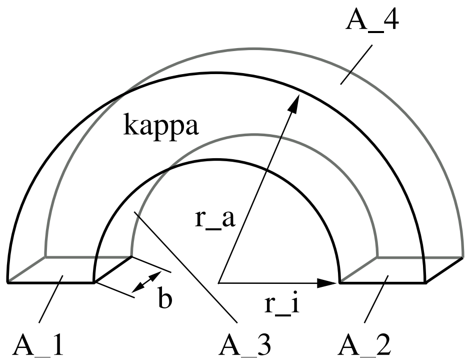

Bild zu 1.14

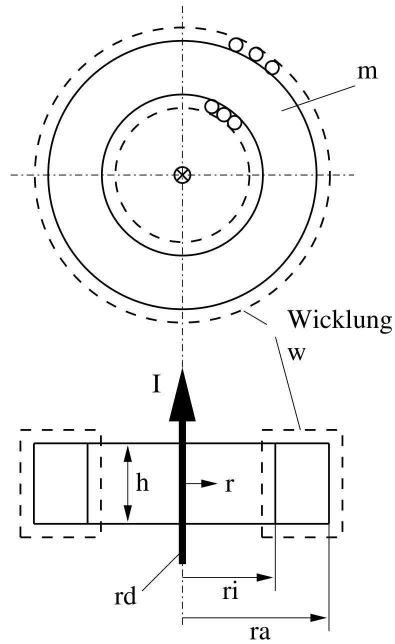

Bild zu 3.19

Z A5 Zusatz: Wohin zeigen eigentlich $\underline{r}_u$ und $\underline{r}_v$?

Sie haben in der VL gelernt, dass zur Berechnung von Flächenintegralen das Kreuzprodukt zweier Vektoren benötigt wird, nämlich von $\underline{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}\underline{r}(u,v)$ und $\underline{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}\underline{r}(u,v)$.

(a) Machen Sie sich zunächst anhand der Polarkoordinaten klar, dass $\underline{r}_u$ und $\underline{r}_v$ **tangential an Parameterlinien** sind.
Hier parametrisieren r, φ die Fläche, spielen also die Rolle von u, v.

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

i. Zeichnen Sie von einem beliebigen Punkt in der (x,y)-Ebene ausgehend z.B. von

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{r}(r=2, \varphi = \frac{\pi}{2}) \qquad (*)$$

die sogenannte Parameterlinie $\underline{\gamma}(r) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi = \text{konstant}) \\ y(r, \varphi = \text{konstant}) \end{pmatrix}$.
Das ist die mit r parametrisierte Linie also die Kurve, entlang der r von dem gewählten Punkt aus zunimmt.
Zeichnen Sie analog $\underline{\gamma}(\varphi)$ mit $r =$ konstant.

ii. Zeichnen Sie die Vektoren $\frac{\partial}{\partial r}\underline{r}(r,\varphi)$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}\underline{r}(r,\varphi)$, an einen beliebigen Punkt in der (x,y)-Ebene z.B. an $(*)$ und vergleichen Sie diese Vektoren mit den Richtungen, in denen r bzw. φ (von diesem Punkt aus) zunimmt.

(b) Machen Sie sich anhand der Kugelkoordinaten klar,

   i. was die Parameterlinien $\underline{\gamma}(\varphi) = \underline{K}(r = \text{konstant}, \varphi, \theta = \text{konstant})$ und $\underline{\gamma}(\theta)$ sind,
   ii. in welcher Richtung φ bzw. θ zunehmen und
   iii. in welcher Richtung $\frac{\partial}{\partial\varphi}\underline{r}(\varphi, \theta)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial\theta}\underline{r}(\varphi, \theta)$ zeigen, vgl. Bsp 9.35.

   Übrigens sind die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial r}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$ und $\frac{\partial}{\partial\theta}\underline{K}(r, \varphi, \theta)$, s. 8.28.

Merke: Sie können also zukünftig mit Hilfe der rechten Hand die Reihenfolge im Kreuzprodukt so planen, dass der Flächennormalenvektor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ in die gewünschte Richtung zeigt.