

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen) 7. Woche – Sektorformel, ...

A1 2D-Gauß \Rightarrow Sektorformel zur Flächenberechnung

Verwenden Sie die Sektorformel [Bem. 9.49](#) zur Berechnung der Fläche des ebenen Bereiches in Aufgabe 2/20.9 d (also mit $f(P) = 1$).

Lösung:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = -\pi \dots 0, \quad \underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \cos(\varphi) + 1 d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung: Auf dem 'Rückweg' von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ (um den Umlauf zu schließen) ist $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}' \Rightarrow$ Integration über 0.

Z A2 2D-Gauß zur Flächenberechnung \Rightarrow 3D-Gauß zur Volumenberechnung

Der Trick bei der Sektorformel [Bem. 9.49](#) ist die Anwendung Satzes von Gauß im 2D-Fall mit Wahl eines günstigen Vektorfeldes \underline{v} , dessen Divergenz konstant ist. Wenden Sie diese Idee zur Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß in 3D an. Wie wählen Sie das Vektorfeld \underline{v} in diesem Fall?

Lösung:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \underline{v} = 3$$

Mit Satz von Gauß $\iiint_V \operatorname{div} \underline{v} dV = \iint_{\partial V} \underline{v} dA$ folgt

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} \underline{v} dA$$

A3 Fläche in Archimedischer Spirale

Berechnen Sie die Fläche, die von der Archimedischen Spirale

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$$

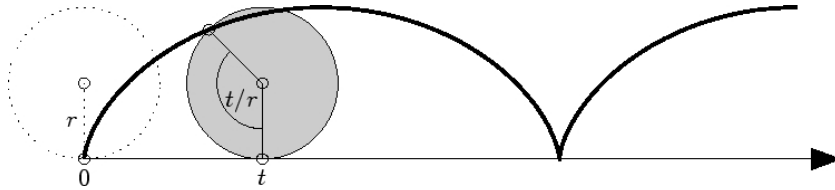
bei der ersten Umdrehung eingeschlossen wird.

Lösung: Anwendung Sektorformel:

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t \sin(t) \\ \sin(t) + t \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4}{3} \pi^3$$

Z A4 Abrollen eines Rades: Bogenlänge und Fläche der Zykloide

Ein Rad mit Radius $r = 1$ rollt entlang einer Geraden. Betrachtet werde ein fester Punkt auf dem Rad.



- (a) Leiten Sie die Kurve, die der Punkt beim Abrollen des Rades beschreibt, in Parameterdarstellung $x(t), y(t)$ her. Wählen Sie dazu als Parameter t die Strecke zwischen Startpunkt und momentanem Berührungspunkt des Rades (s. Skizze).
- (b) Berechnen Sie die Länge der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.
- (c) Berechnen Sie die Fläche unter der in (a) bestimmten Kurve für das einmalige Abrollen des Rades.

Lösung: Mit Radius $r = 1$:

- (a) Mittelpunkt des Rades ist bei $M = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Punkt des Rades ist bei $\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

- (b) Mit $\underline{\gamma}' = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ folgt

$$L = \int_{\gamma} \|\underline{\gamma}'\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8$$

- (c) Um die Fläche in der richtigen Richtung zu umlaufen: 'Hinweg' von $(0, 0)$ nach $(2\pi, 0)$ mit $\underline{\gamma} \parallel \underline{\gamma}' \Rightarrow$ Integration über 0 und dann 'zurück' $t = 2\pi \dots 0$:

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \det(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}') d\varphi = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 (2\cos(t) - 2 + t\sin(t)) dt = 3\pi$$