Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
8. Woche – Taylor, Jacobi-Matrix + Kettenregel, inplizite Funktion

A1 Taylor, Taylor, Taylor

(a) **eindimensional**

i. Geben Sie eine Funktion $f(x)$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ist.

ii. Geben Sie den 'Fehler' (Differenz zwischen Funktion und Taylornäherung) $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ sowie seine erste und zweite Ableitung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an ;-).

(b) **zweidimensional**

i. Geben Sie eine Funktion $f(\underline{x})$ an, deren Taylor-Entwicklung 2. Ordnung (um den Entwicklungspunkt $\underline{x}_0 = \underline{0}$) $T_2(\underline{x}) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$ ist.

ii. Geben Sie den 'Fehler' $R_2(\underline{x}) = f(\underline{x}) - T_2(\underline{x})$ sowie seinen Gradienten und seine Hesse-Matrix an der Entwicklungsstelle $\underline{x}_0 = 0$ an ;-).

Z A2 Who is who?

(a) Kettenregel: Geben Sie für das Beispiel 10.6 n, m und k entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.5 an.

(b) Implizite Funktion: Geben Sie für das Beispiel 10.8 n und m entsprechend der Nomenklatur in Satz 10.11 an.

Z A3 Kettenregel - Polarkoordinaten

Betrachtet wird die Funktion $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi)$, Funktion P in Bsp. 8.29, Polarkoordinaten sowie deren Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = f^{-1}(x, y)$, s. Funktion g in Beispiel 10.6.
Verwenden Sie beide Funktionen in Satz 10.5, Kettenregel und ermitteln Sie das Produkt der beiden Jacobi-Matrizen (von f und f^{-1}). Das Ergebnis steht laut Kettenregel vorher fest (Welche Funktion h stellt die Verkettung von f und f^{-1} dar? ;-)) !

A4 Kartesische K. ↔ Kugelkoordinaten - eindeutig?

Überprüfen Sie, in welchen Fällen die Kugelkoordinaten eine (eindeutige) Funktion der kartesischen Koordinaten sind, indem Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 anwenden!

Bringen Sie also die explizite Form $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = K(\underbrace{r, \varphi, \theta}_{\underline{y}})$ (Bsp. 8.29) in die implizite Form $\underline{x} - K(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Überprüfen Sie nun die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen.

Z A5 $f(x,y) = x - y^3 = 0$ **- eindeutig nach y auflösbar?**

(a) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen Satz 10.11 an, um zu entscheiden, ob die Funktion $f(x,y) = x - y^3 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(0,0)$ eindeutig nach y auflösbar ist.

(b) Zeichnen Sie die Funktion $y = x^3$ und deren Umkehrfunktion.

(c) Stellt (b) einen Widerspruch zu Ihrem Ergebnis von (a) dar, also ein 'Gegenbeispiel' zum Satz über implizite Funktionen? ;-)

A6 **Zusatz: Anwendung Taylor(implizite Funktion)**
Aus der email eines Doktoranden der Fak. ET (vom 21.3.24):

Ich bin tatsächlich auch schon über eine Frage gestolpert. Was kann ich denn machen, wenn ich eine Funktion Taylor-Approximieren will, wie z.B. die hier.

$$i(u) = i_0 \left(\mathrm{e}^{\alpha_A \cdot f \cdot u} - \mathrm{e}^{\alpha_C \cdot f \cdot u} \right)$$

aber mich eigentlich der Zusammenhang u(i) interessiert und nicht i(u), aber ich nicht die Umkehrfunktion von i(u) analytisch bestimmen kann?

(a) Formen Sie die obige Gleichung $i = \dots$ in die '=0'-Form um und überzeugen Sie sich, dass diese implizite Gleichung von $(i,u) = (i_0, 0)$ erfüllt wird.

(b) Geben Sie die lineare Appoximation der vom Doktoranden gewünschten Funktion $u(i)$ um $u_0 = 0$ an.

Z A7 **Zusatz: Tailor your ODE!**
Sie wollen eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

(a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).

(b) Geben Sie die DGL dieser Kurvenschar an.
Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung von DGLn (Gegeben und Gesucht vertauscht).