Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. Lösungen)
11. Woche – Taylor und Newton und DGL 1. Ordnung

A1 $T_1(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\;$ **Iterationsvorschrift**
Gegeben ist eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\underline{x}_0, F(\underline{x}_0))$ an: $F(\underline{x}) = \ldots$, vgl. VL 10.1.

(b) Bestimmen Sie die 'Nullstelle' dieser Tangentialebene, indem Sie $F(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0$ setzen und nach $\underline{x}$ umstellen (die Jacobimatrix sei in $\underline{x}_0$ invertierbar).

(c) Vergleichen Sie mit der Iterationsvorschrift in VL 10.26!

Lösung:

(a)
$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_0) + J_F(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

(b)
$$F(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \underline{x} = \underline{x}_0 - J_F^{-1}(\underline{x}_0)F(\underline{x}_0)$$

(c) Auffallende Ähnlichkeit! Offenbar bestimmt die Iterationsvorschrift
$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - J_F^{-1}(\underline{x}^k)F(\underline{x}^k)$$
die Nullstelle der Tangentialebene der Funktion F am k-ten Iterationspunkt $\underline{x}^k$.

Z A2 $y' = f(x)$ **vs.** $y' = f(y)$
Sie haben in der VL 11.1 die allgemeine Form der DGL 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ kennen gelernt. Welchen der beiden Spezialfälle $y' = f(x)$ oder $y' = f(y)$ können Sie bereits lösen und wie?

Lösung: $y' = f(x)$ ist zu lösen mit
$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x + C \quad \text{bzw. } y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')\,\mathrm{d}\,x' + y(x_0) \quad \text{AWA.}$$
Integration quasi als 'Umkehroperation' zur Differentiation.