Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)
12. Woche – DGL 1. Ordnung: separabel / linear / eindeutige Lsg.

Z A1 Klassifikation DGL 1. Ordnung: separabel, linear
Klassifizieren Sie die Aufgaben U2/24.15 a-f,n:
Welche DGL sind separabel (Gruppe I) und welche sind linear (Gruppe II).
Fertigen Sie ein Venn-Diagramm an.

A2 Wahr oder falsch
Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in x ist.
( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn f linear in $y(t)$ ist.
( ) Die DGL $y'(t) = f(x, y(t))$ ist linear, wenn $f = a(x)y(t) + g(x)$ ist.

A3 Für Fortgeschrittene: **Existenz und Eindeutigkeit der Lösung**

(a) Welche Lösung hätte die Anfangswertaufgabe (AWA) 24.9 b mit der Anfangsbedingung $y(1) = -1$?
Erfüllt diese AWA die Bedingung für Eindeutigkeit der Lösung aus Satz 11.7?
Lösung: Sowohl die Lösung $y(x) = \frac{1}{4}(x+C)^2-1$, mit $C = -1$ (für $x \geq 1$, da $y \geq -1$!) als auch die Lösung $y \equiv -1$ erfüllen diese AWA. Die Lösung ist nicht eindeutig.
Die DGL erfüllt bei $y = -1$ **nicht** Bedingung im Satz 11.7 2: die Wurzelfunktion $\sqrt{y+1}$ hat dort keine beschränkte Ableitung (f hat keine beschränkte partielle Ableitung bzgl. y).

(b) Erfüllt die AWA 24.9 g die Bedingung aus Satz 11.7? Welchen Wert nimmt die Lösung für $x = 2$ an?
Lösung: Die AWA mit der Anfangsbedingung $x_0 = 0, y_0 = -1$ erfüllt die Bedingungen in Satz 11.7. Jedoch ist das durch den Satz garantierte Existenzintervall endlich: die Lösung dieser AWA $y(x) = -(1-\dfrac{2}{3}x^3)^{-1/2}$ existiert nur für $-\sqrt[3]{3/2} < x < \sqrt[3]{3/2}$. Sie hat eine 'endliche Fluchtzeit', heißt geht bereits für $x = \sqrt[3]{3/2}$ gegen unendlich und existiert eben nicht mehr für $x = 2$.

Z (c) Bei Aufgabe 24.12 b 'sieht' man sofort eine Lösung $y \equiv -1$ die auch noch die Anfangsbedingung erfüllt. Erfüllt die DGL in einem Intervall um $x = 1$ Bedingung im Satz 11.7 und ist damit die 'gesehene' Lösung sicher die Einzige?
Lösung: Die DGL $y' = -(y+1)\ln(x)/x$ erfüllt überall die Bedingungen im Satz 11.7 (nur in $x = 0$ nicht). Um den gegebenen Anfangswert $x = 1$ sind die Bedingungen erfüllt und damit ist die 'gesehene' Lösung (in einem Intervall um $x = 1$) sicher die Einzige.

Z A4 Fahrplan: Lösung inhomogener DGL 1. Ordnung (mit Anfangsbedingung)
Ordnen Sie die folgenden Arbeitsschritte in der richtigen Reihenfolge:

- (Anpassen des konstanten Faktors C der homogenen Lösung, so dass die Anfangsbedingung erfüllt ist),
- Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung zur 'allgemeinen' Lösung
- Bestimmung der homogenen Lösung z.B. mit Trennung der Variablen (TdV)
- Bestimmung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten (VdK).

Z A5 Allgemein statt Konkret: VdK
In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.20 wie sich die DGL zur Bestimmung der 'variierten' Konstanten durch Aufheben gewisser Terme ergibt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

(a) Den Ansatz $y(x) = K(x) \cdot y_h(x)$ ableiten,

(b) in die lineare DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ einsetzen und

(c) berücksichtigen, dass $y_h(x)$ die homogene DGL $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ erfüllt.

Lösung:

(a) $y(x) = K(x) \cdot y_h(x) \;\Rightarrow\; y'(x) = K'(x)y_h(x) + K(x)y'_h(x)$

(b) $a(x)\left[K'(x)y_h(x) + K(x)y'_h(x)\right] + b(x)K(x)y_h(x) = c(x)$

(c) $a(x)K'(x)y_h(x) + K(x)\underbrace{\left[a(x)y'_h(x) + b(x)y_h(x)\right]}_{=0,\text{ da homogene Lsg.}} = c(x) \;\Rightarrow\; K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\frac{1}{y_h(x)}$