Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

A1 Die DGL $\frac{y''}{y} = k^2$ [1] führt zur homogenen DGL $y'' - k^2 y = 0$ deren Lösung in zwei verschiedenen Formen angegeben werden kann (Bsp. 11.38):

$$i)\ y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{kx} + c_2\,\mathrm{e}^{-kx} \text{ oder } \quad ii)\ y(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(-kx)$$

Die Konstanten der homogenen Lösung c_1, c_2 bzw. werden C_1, C_2 werden durch Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt.
Welche der beiden Varianten i) oder ii) würden Sie wählen, wenn

(a) eine Anfangsbedingung lautet: $y(0) = 0$,

(b) eine Anfangsbedingung lautet: $y(\infty) = 0$?

Hinweis: Mit der günstigen Wahl steht eine der Konstanten sofort fest (ohne die zweite Anfangs- oder Rand-Bedingung zu betrachten).

Z A2 Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu Bsp. 11.20 (harmonisch angeregtes RC-Glied)

$$RC \cdot u'(t) + u(t) = \cos(\omega t + \phi_q), \quad u_h(t) = D\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

mit Hilfe das Ansatzes nach Art der rechten Seite (also **nicht** so :-)).

Z A3 Wenn Resonanz nicht beachtet wird
Beobachten Sie, was passiert, wenn man bei einer DGL höherer Ordnung im Ansatz für die partikuläre Lösung Resonanz nicht beachtet und z.B. für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ nur ansetzt $y_p = ax + b$.

Z A4 Wenn bei Resonanz 'zu viel' angesetzt wird
Der richtige Ansatz für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ ist $y_p = (ax + b)x$. Beobachten Sie den Effekt, wenn quasi 'zu viel' angesetzt wird: $y_p = ax^2 + bx + c$

Z A5 Wronski-Determinante

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Lösungen der homogenen DGL tatsächlich linear unabhängig sind für Aufgabe 2/25.5 i).

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x + \varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.

[1] Diese DGL taucht in Ma4 und in der Theoretischen Elektrotechnik bei der Lösung partieller DGL wieder auf.

A6 Theoretische Elektrotechnik: Lösung der Radialgleichung

Gegeben ist die (für kugelsymmetrische Probleme der Elektrostatik) genutzte Differentialgleichung, s. Radialgleichung, für die Funktion $R(r)$:

$$r^2 R'' + 2rR' = l(l+1)R(*)$$

(a) Klassifizieren Sie die DGL (Ordnung, linear/nichtlinear, konstante Koeffizienten oder nicht).

(b) Überprüfen Sie (durch einsetzten), ob

$$R_1(r) = r^l \quad \text{und} \quad R_2(r) = r^{-(l+1)}$$

die DGL (*) lösen.

(c) Kann es weitere (von den Lösungen in (b)) linear unabhängige Lösungen der DGL (*) geben? (Begründung!).

A7 Zusatz: Bestimmen Sie die Lösungen λ der Gleichung

$$\lambda^2 = \mathrm{i}\omega\mu\kappa \qquad \text{mit } \omega, \mu, \kappa \in \mathbb{R}_+$$

und geben Sie unter Verwendung dieser $\mathrm{e}^{\lambda x}$ an.