Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

A1 Homogen - inhomogen

Nur bei **linearen** DGL hat es Sinn, von homogen und inhomogen zu sprechen. Ordnen Sie 'homogen' und 'inhomogen' zu und geben je ein Beispiel an!

$$y'(t) = a(x)y(t) + g(x) : \ \dots$$
$$y'(t) = a(x)y(t) : \ \dots$$

A2 Wahr oder falsch

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

( ) Die homogene Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.
( ) Die homogene Lösung löst die homogene DGL.
( ) Die partikuläre Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.
( ) Die partikuläre Lösung löst die inhomogene DGL.
( ) Mit jeder homogenen Lösung $y_H(t)$ ist auch $C \cdot y_H(t)$ homogene Lösung.
( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $C \cdot y_P(t)$ partikuläre Lösung.
( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $y_P(t) + C \cdot y_H(t)$ partikuläre Lösung.

Z A3 Zusatz: **Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL**

In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.24 dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer lineararen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

(a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,
(b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}$ ersetzen und
(c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

A4 Tailor your ODE!

Sie wollen eine DGL finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

(a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x, y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).
(b) Geben Sie die (exakte) DGL dieser Kurvenschar an.

Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung exakter DGLs (Gegeben und Gesucht vertauscht).

Z A5 Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL

Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \overset{z.B.}{=} \Phi(x, y)$ eine Rolle, s. Satz 9.29; bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x, y) = 0$ verwenden), s. Satz 10.11; und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x, y) = c$, s. VL 11.4.

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

A6 d'Alembert → weitere homogene Lösung

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ besitzt die Lösung $y_1(x) = \mathrm{e}^x$. Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert eine weitere Lösung. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL?

Z A7 Wronski-Determinante

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Lösungen der homogenen DGL tatsächlich linear unabhängig sind für Aufgabe 2/25.5 i).

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x + \varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.