Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

13. Woche – homogen/inhomogen, Bernoulli, d'Alembert, Wronski

A1 Homogen - inhomogen

Nur bei **linearen** DGL hat es Sinn, von homogen und inhomogen zu sprechen.
Ordnen Sie 'homogen' und 'inhomogen' zu und geben je ein Beispiel an!

$$y'(t) = a(x)y(t) + g(x) : \ \ldots$$
$$y'(t) = a(x)y(t) : \ \ldots$$

A2 Wahr oder falsch

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

( ) Die homogene Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

( ) Die homogene Lösung löst die homogene DGL.

( ) Die partikuläre Lösung löst die homogene und die inhomogene DGL.

( ) Die partikuläre Lösung löst die inhomogene DGL.

( ) Mit jeder homogenen Lösung $y_H(t)$ ist auch $C \cdot y_H(t)$ homogene Lösung.

( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $C \cdot y_P(t)$ partikuläre Lösung.

( ) Mit jeder partikulären Lösung $y_P(t)$ ist auch $y_P(t) + C \cdot y_H(t)$ partikuläre Lösung.

Z A3 Zusatz: **Allgemein statt Konkret: Bernoulli-DGL**

In der VL sieht man am konkreten Bsp. 11.24 dass der Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ zu einer lineararen DGL führt. Schreiben Sie dies allgemein auf, in dem Sie

(a) Den Ansatz $u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ ableiten,

(b) darin $y'(t)$ mit der rechten Seite der Bernoulli-DGL der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}$ ersetzen und

(c) die lineare DGL für $u(t)$ angeben.

Lösung:

(a) $u(t) = (y(t))^{1-\alpha} \ \Rightarrow \ u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t)$

(b) $u'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,y'(t) = (1-\alpha)\,(y(t))^{-\alpha}\,[a(t)y(t) + b(t)\,(y(t))^{\alpha}]$

(c) $u'(t) = (1-\alpha)[a(t)\,\underbrace{(y(t))^{1-\alpha}}_{=u(t)} + b(t)] = (1-\alpha)\,[a(t)u(t) + b(t)]$

A4 Tailor your ODE!

Sie wollen eine DGL finden, deren Lösungen auf von Ihnen vorgegebenen Kurven verlaufen.

(a) Wählen Sie eine mit $\Phi(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ parametrisierte Kurvenschar (z.B. Schar der Kreis-Kurven: $x^2 + y^2 = C$).

(b) Geben Sie die (exakte) DGL dieser Kurvenschar an.

Bemerkung: Das ist quasi das inverse Problem zur Lösung exakter DGLs (Gegeben und Gesucht vertauscht).

Lösung:

(a) Z.B. Schar der Höhenlinien eines Sattels (Hyperbeln) $z = x^2 - y^2 = \Phi(x,y) = C$.

(b) (exakte) DGL: $\Phi_x + \Phi_y y' = \underbrace{2x}_{p} \underbrace{-2y}_{q} y' = 0$.

Z A5 Potentialfunktion, implizite Funktion, exakte DGL

Wir haben im Laufe des Semesters quasi drei mal Ähnliches gemacht: bei Kurvenintegralen 2. Art spielt eine Potentialfunktion $\Phi \overset{z.B.}{=} \Phi(x,y)$ eine Rolle, s. Satz 9.29; bei impliziten Funktion geht es um ein $f = 0$ (wir wollen hier mal $\Phi(x,y) = 0$ verwenden), s. Satz 10.11; und bei exakten DGL geht es um $\Phi(x,y) = c$, s. VL 11.4.

Erstellen Sie sich eine Übersicht zu diesen drei Anwendungen quasi ein und derselben Sache.

Lösung:

Thema	Gegeben	Fragestellung	Gesucht	Zusammenhang
Kurvenintegral	$\underline{F}$	$\int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s} \overset{?}{=} \Phi(\underline{b}) - \Phi(\underline{a})$	Φ	$\underline{F} = \operatorname{grad}\Phi$ wenn $\operatorname{rot}\underline{F} = \underline{0}$
Implizite Funktion	$\Phi(x,y) = 0$	$y \overset{?}{=} y(x)$	ja/nein bzw. $y'(x)$	$y'(x) = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ wenn $\Phi_y \neq 0$
Exakte DGL	$p + qy'(x) = 0$	Existiert implizite Lsg.?	$\Phi(x,y) = c$	$p = \Phi_x, q = \Phi_y$ wenn $p_y = q_x$

Oder kompakter

Kurvenintegral:	$\operatorname{grad}\Phi$	$\Rightarrow \Phi$
Implizite Funktion:	$\Phi = 0$	$\Rightarrow$ DGL $\Rightarrow y'$
Exakte DGL:	DGL	$\Rightarrow \Phi = c$

A6 d'Alembert $\to$ weitere homogene Lösung

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ besitzt die Lösung $y_1(x) = \mathrm{e}^x$. Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode von d'Alembert eine weitere Lösung. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL?

Lösung:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_1(x) \cdot v(x) = \mathrm{e}^x \cdot v(x) \\
y'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (v(x) + v'(x)) \\
y''(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (v(x) + 2v'(x) + v''(x)) \\
&\Rightarrow \mathrm{e}^x \cdot (v(x) + 2v'(x) + v''(x) - 3v(x) - 3v'(x) + 2v(x)) \\
&= \mathrm{e}^x \cdot (v''(x) - v'(x)) \\
&= \mathrm{e}^x \cdot (w'(x) - w(x)) \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^x > 0$ folgt

$$w'(x) = w(x) = \mathrm{e}^x = v'(x) \Rightarrow v(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow y_2(x) = \mathrm{e}^x \cdot v(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Z A7 Wronski-Determinante

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob die Lösungen der homogenen DGL tatsächlich linear unabhängig sind für Aufgabe 2/25.5 i).

(b) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x)$ linear abhängig?

(c) Sind die Funktionen $\cos(x), \sin(x), \cos(x+\varphi)$ linear abhängig?

(d) Wählen Sie 3 Funktionen, die Sie für linear abhängig halten und betrachten deren Wronski-Determinante.

Lösung:

(a)

$$W(x) = \det(e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2\,x \\ 1 & x+2 & x^2+4\,x+2 \end{pmatrix}) = 2e^{3x} \neq 0$$