"Ubungen zur Vorlesung Mathematik I/2

14. Woche – falscher Ansatz nach Art der rechten Seite, DGL-System

Z A1 Wenn Resonanz nicht beachtet wird

Beobachten Sie, was passiert, wenn man bei einer DGL höherer Ordnung im Ansatz für die partikuläre Lösung Resonanz nicht beachtet und z.B. für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ nur ansetzt $y_p = ax + b$.

Lösung: Ansatz: $y_p = ax + b, \Rightarrow y_p' = a, y_p'' = y_p''' = 0$

In DGL Einsetzen: $y''' - y' = 0 - a \stackrel{!}{=} -2x$ Widerspruch!

Merke: Ohne Berücksichtigung der Resonanz (partikuläres Lambda = homogenes Lambda: $\lambda_{krit} = 0 = \lambda_1$) kann der partikuläre Ansatz nicht die inhomogene DGL erfüllen.

Z A2 Wenn bei Resonanz 'zu viel' angesetzt wird

Der richtige Ansatz für Aufgabe 25.7 b $y''' - y' = -2x$ ist $y_p = (ax + b)x$. Beobachten Sie den Effekt, wenn quasi 'zu viel' angesetzt wird: $y_p = ax^2 + bx + c$

Lösung: Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c, \Rightarrow y_p' = 2ax + b, y_p'' = 2a, y_p''' = 0$

In DGL Einsetzen: $y''' - y' = 0 - 2ax - b \stackrel{!}{=} -2x$ liefert $a = 1, b = 0, c \in \mathbb{R}$ beliebig, folglich $y_p = x^2 + c$.

Merke: Mit einem 'Zu viel'-Ansatz erhält man auch eine richtige partikuläre Lösung, die jedoch nicht eindeutig ist ($c \in \mathbb{R}$ beliebig), da sie ein beliebiges Vielfaches der homogenen Lösung enthält.

Z A3 Romeo & Juliet

Die Beziehung von Romeo & Juliet hängt entscheidend von den Eigenwerten der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ab, s. Bsp. 11.41.

(a) Diskutieren Sie die Eigenwertsituation für ein Paar aus 'Nerds', also für $a, d > 0$ und $b, c < 0$.

(b) Warum ist die Zukunft eines Paares 'sicherer Liebhaber' ($a, d < 0$ und $b, c > 0$) für $ad - bc > 0$ langweilig?

Lösung:

(a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \Rightarrow$ Das DGL-System hat für $ad - bc > 0$ nur Eigenwerte in der rechten Halbebene ($\Re(\lambda) > 0$), für $ad - bc < 0$ je einen Eigenwert in der rechten und linken Halbebene.

(b) Für $ad - bc > 0$ liegen alle Eigenwerte in der linken Halbebene. Folglich gehen alle Lösungen gegen 0: Null Liebe/Hass ;-)

Z A4 DGL n-ter Ordnung $\Rightarrow$ DGL-System

(a) Überführen Sie die DGL aus Aufgabe 2/25.5 b) in ein DGL-System, entsprechend Bem 11.42.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix A und vergleichen Sie diese mit den Nullstellen des Charakteristischen Polynoms der DGL 2. Ordnung (2/25.5 b).

Lösung:

(a) $\underline{u}' = A \cdot \underline{u}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Die Eigenwerte von A sind $\lambda = 0, -1, 2$ und stimmen mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DGL 3. Ordnung überein.