12. Fourieranalysis

spezielle Reihen von Funktionen

↗ §4.6 Taylor-Reihen / Potenzreihen

Hier Reihen von Winkelfunktionen bzw. kompl. Exp-Funktionen

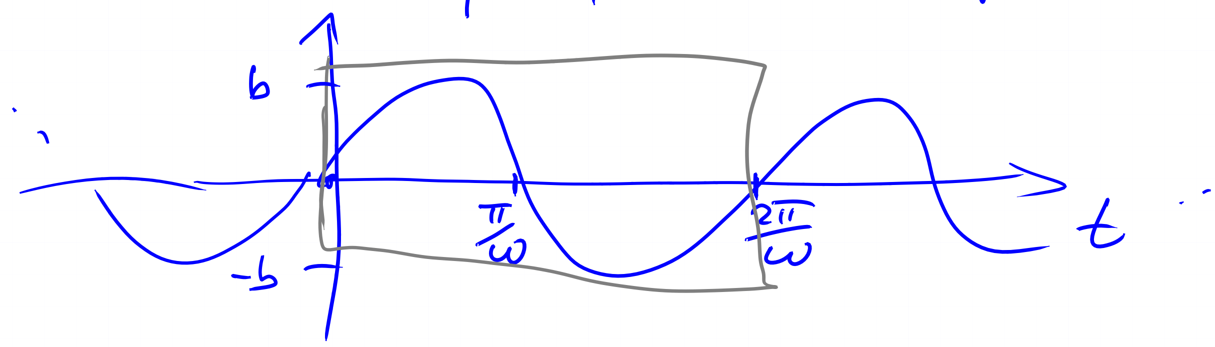
12.1 Trigonometrische Polynome

Bsp. 12.1

In der Akustik beschreibt ein „Ton" eine „sinusförmige Schallschwingung"

$$x(t) = b \cdot \sin(\omega t)$$

wobei ω die Frequenz, b die Amplitude und t die Zeit ist.



Ein „Klang" ist eine „periodische Schallschwingung" und besteht aus mehreren sich überlagernden Tönen, z.B.

$$x(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) + b_3 \sin(\omega_3 t)$$

⇒ Synthese: aus Tönen wird Klang

Analyse: bestimme aus Klang die Amplituden und Frequenzen der Töne

⇒ Fourier-Analyse: beliebige periodische Signale werden als Überlagerung einfacher Schwingungen dargestellt.

Def. 12.2

Ein trigonometrisches Polynom vom Grad n ist eine Funktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$p_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

wobei die Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ sind. Die Menge aller trigonometrischen Polynome bezeichnen wir mit T.

Bem. 12.3

- Polynom: Setzen wir $z = e^{ix} \in \mathbb{C}$, so folgt
$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot z^k,$$
also in etwa ein Polynom (vom Laurent-Typ, da auch neg. Potenzen) in z.

- trigonometrisch: Mit $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ folgt die Darstellung

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, genauer

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$$
$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

- e^{ix} ist 2π-periodisch.

Satz 12.4

Gilt $c_{-k} = \overline{c_k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ so ist P_n reellwertig und

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_k), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$
$$b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

12.2. Konvergenz von Funktionenfolgen und der L^2

↗ § 4.6 Taylorentwicklungen $T_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f.

$\Rightarrow$ (T_n) Funktionenfolge

Mit Hilfe des Restgliedes $\Rightarrow$ Konvergenz gegen f

Trigonometrische Polynome bilden für eine Folge (c_k) ebenfalls eine Funktionenfolge (P_n). Wie sieht deren Konvergenz aus?

Was bedeutet „Konvergenz" hierbei.

Def 12.5

Für zwei Funktionen $p, q : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ definieren wir das L^2-Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} p(x) \cdot \overline{q(x)}\, dx$$

und die L^2-Norm

$$\|q\|_2 := \sqrt{\langle q, q \rangle}.$$

Bem. 12.6

- L^2 wird als „ell zwei" ausgesprochen. L ~ Mathematiker Lebesgue
- In Def 6.23 haben wir für Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt definiert und in Bem. 6.24 das allg. Skalarprodukt kennengelernt.

Eigenschaften Sym., Linearität ok

$\langle x, x \rangle \geq 0$ ✓

$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (fast) überall (↗ Integral von Nullmengen)

Vektorraum V geeignet $\to$ Def. 12.8. Es gilt

$$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}\ , \quad \langle f,\lambda g\rangle = \bar{\lambda}\langle f,g\rangle$$

Bsp 12.7

· Es seien $n,m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx$$

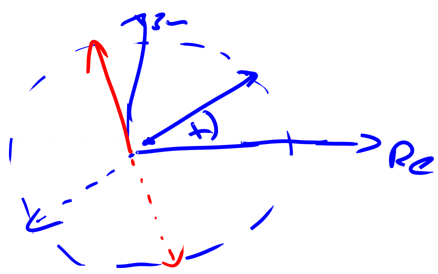
1. Fall: $n=m$: $\langle e^{inx}, e^{inx}\rangle = \|e^{inx}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\,dx = 2\pi$

2. Fall: $n\neq m$: $\langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = \dfrac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{i(n-m)}\left(e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right) = 0$

$+2\pi(n-m)i$, $\in\mathbb{Z}$

geom: $n-m\in\mathbb{Z} \Rightarrow z = e^{ix}$

„Umrundungen"



$\Rightarrow \langle e^{inx}, e^{imx}\rangle = 0$

$\Rightarrow$ Somit sind e^{inx} und e^{imx} sind orthogonal für $n\neq m$.

$\boxed{A}$ · Es seien $n,m\in\mathbb{N}_0$

$$\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)\big)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & m\neq n, \\ 2\pi & m=n=0, \\ \pi & m=n\neq 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe des Bsp. 12.7 können wir eine Orthonormalbasis des Vektorraumes T der trigonometrischen Polynome angeben

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \quad k\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}.$$

Der Vektorraum T ist Teilraum eines (größeren) fundamentalen Funktionenraums.

Def. 12.8

Der Funktionenraum $L^2(-\pi,\pi)$ der sogenannten quadratintegrierbaren Funktionen auf $(-\pi,\pi)$ ist definiert als die Menge

$$L^2(-\pi,\pi) := \left\{ f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{C} \ :\ \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx < \infty \right\}$$

Gilt $\|f-g\|_2 = 0$ für zwei Elemente f,g von $L^2(-\pi,\pi)$, so werden f und g miteinander identifiziert. Zusammen mit $\mathbb{C}$ ist $L^2(-\pi,\pi)$ ein Vektorraum mit dem L^2-Skalarprodukt aus Def 12.5.

Bem. 12.9

- Da die L^2-Norm über Integrale definiert ist, werden Funktionen, die auf Nullmengen unterschiedlich sind, miteinander identifiziert

$$f,g,h: (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 1$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Riemann-Integral

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi,\pi) \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\leftarrow$ Lebesgue-Integral

$$\|f-g\|_2 = \|f-h\|_2 = \|g-h\|_2 = 0$$

- Beschränkte Funktionen über $[-\pi,\pi]$ liegen in $L^2(-\pi,\pi)$.