Aufgabe 5 Gegeben ist die gebrochen lineare Abbildung $w = \frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Auf welche Punkte werden $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ und $z_4 \to \infty$ abgebildet? $\boxed{2}$

(b) Wohin wird die reelle Achse abgebildet? $\boxed{1}$

(c) Wohin wird die rechte Halbebene abgebildet? $\boxed{2}$

(d) Worauf wird der Einheitskreis abgebildet? $\boxed{1}$

(e) Wohin wird das Innere des Einheitskreises abgebildet? $\boxed{1}$

(f) Worauf wird die Gerade durch die Punkte $z = -\mathrm{i}$ und $z = 1$ abgebildet? (grafischer Lösungsweg möglich, das Ergebnis aber auch **analytisch** angeben - z.B. Geradengleichung!) $\boxed{4}$

Aufgabe 6 Man bestimme den Wert der komplexen Integrale

(a)

$$I = \int_C \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}\, z, \; C: \quad \text{geradlinig von } z_1 = -\mathrm{i} \text{ bis } z_2 = \mathrm{i},$$

$\boxed{2}$

(b)

$$I = \oint_C \frac{1}{(z - \mathrm{i})(z^2 + 1)} \, \mathrm{d}\, z, \; C: \; z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 7

(a) Man berechne

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9x^2 + 1} \, \mathrm{d}\, x$$

mit Methoden der Funktionentheorie. $\boxed{5}$

(b) Unter welcher Voraussetzung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{z_k \in H^+} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \; ?$$

Dabei sind z_k die Pole von $f(z)$ und H^+ bezeichnet die obere komplexe Halbebene ($\mathrm{Im}(z) > 0$). $\boxed{3}$