Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

1. Woche – RWA, EWA

Trigonometrische Reihen, Fourier-Reihe, $L^2(-\pi, \pi)$

Stoff aus Ma2

A1 Unterschied RWA – EWA

Machen Sie sich den Unterschied zwischen Randwertaufgabe und Eigenwertaufgabe klar, in dem Sie den folgenden Lückentext füllen.
Vorschläge für die Lücken:
Eigenfunktionen, Eigenwerte, variablen, feststehenden, keine, unendlich viele, eindeutige
Eine Randwertaufgabe besteht aus einer **...** DGL mit Randbedingungen und hat genau eine oder keine oder unendlich viele Lösungen.
Hingegen besteht eine Eigenwertaufgabe aus einer **...** DGL(λ) mit Randbedingungen und hat für spezielle Werte der Variablen, den **...** , **...** Lösungen (die die Randbedingungen erfüllen), nämlich beliebige Vielfache der zugehörigen **...** .

A2 Von der Funktion zur DGL/AWA

Sie haben gelernt, dass Differentialgleichungen (zusammen mit Anfangswerten) Funktionen (die Lösungen) bestimmen, auch wenn diese evtl. nicht elementar sind und z.B. nur mit Potenzreihen beschrieben werden.
Hier sollen Sie quasi rückwärts vorgehen: Gegeben: Funktion, Gesucht: DGL/AWA.

Funktion	DGL, AWA
Polynom vom Grad n	$y^{n+1} = 0, y^k(0) = y_k, k = 0, \ldots, n$
$e^{\alpha x}$	$y' =$
$\ln x$	
$\cos(\omega x)$	$y'' + \ldots y = 0, y(0) = \ldots, y'(0) = \ldots$
$\sin(\omega x)$	
Bessel-Funktionen	
eigenes Beispiel	

Ab jetzt Stoff aus Ma3

A3 Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ mit $z \in \mathbb{C}$. Mit welcher (reellen) Funktion stimmt die Funktion auf der reellen Achse (also für reelle Argumente) überein?

A4 Trigonometrische Polynome

Sie haben die trigonometrischen Polynome (Def. 12.2) kennen gelernt.

(a) Unter welcher Bedingung an die komplexen Koeffizienten c_k und c_{-k} ist $P_n(x) \in \mathbb{R}$ für alle x?

(b) Geben Sie die $c_k, k = 0, 1, 2$ an für

$$P_2(x) = 1 + 2\cos(x) + 3\sin(2x) = \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) Geben Sie für

$$P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = A_1 \left(\cos(\varphi)\cos(x) - \sin(\varphi)\sin(x)\right) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

$c_1, |c_1|$ sowie $\arg(c_1)$ an.

A5 Trigonometrisches Polynom = endliche Fourier-Reihe

Zeichnen sie die folgenden Funktionen im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $\cos(x)$, $-\sin(x)$,

(b) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$, 'addieren' Sie die Funktionen aus (a) graphisch.

(c) Lesen Sie vom Graphen (b) Amplitude und Phase, also A, φ für $f(x) = A\cos(x + \varphi)$ ab.

A6 Knowing c_0 and c_1 is knowing the signal $P_1(x)$

Gegeben sind die folgenden Koeffizienten der **reellen** trigonometrischen Polynome $P_1(x) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$. Geben Sie jeweils c_{-1} an und zeichnen Sie das zugehörige $P_1(x)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

(a) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$,

(b) $c_0 = 1, c_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}$,

(c) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

A7 **L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\pi, \pi)$**

Sie haben das L^2-Skalarprodukt (Def. 12.5) $\langle p, q\rangle$ mit $p, q : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ kennen gelernt.

(a) Ist $\langle p, p\rangle$ stets reell?

(b) Ist $\langle p, q\rangle$ stets reell?

(c) Geben Sie die L^2-Normen $\| \cos(x)\|_2$ und $\| \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\|_2$ an. Gehören die Funktionen $\cos(x)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ zum $L^2(-\pi, \pi)$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen?

(d) Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}, & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$

Für welche α gehört $f(x)$ zum $L^2(-\pi, \pi)$?

Zusatz: **L^2-Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$**

Anstelle 2π-periodischer Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wollen wir jetzt T-periodische Funktionen im Intervall $[-T/2, T/2]$ betrachten.

(a) Geben Sie die Sinus- und Kosinus-Funktion mit der Periode T an und überprüfen Sie, dass diese tatsächlich T-periodisch sind.

(b) Wie berechnet sich im $L^2(-T/2, T/2)$ das Skalarprodukt bzw. die L^2-Norm?

(c) Geben Sie Skalarprodukt und Norm Ihrer Funktionen aus (a) an.