Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1
1. Woche – naiver Ansatz anstatt Putzer, RWA, EWA

A1 Wenn naiver Ansatz anstatt Putzer

Beobachten Sie, was passiert, wenn man bei einem DGL-System mit mehrfachen Eigenwerten anstelle des Putzer-Algorithmus einen naiven Ansatz (fälschlig analog DGL höherer Ordnung $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 x e^{\lambda_2 x}$) verwendet, also in Aufgabe 26.1 c den falschen Ansatz:

$$\underline{y}_h = c_1 \underline{v}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \underline{v}_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 \underline{v}_2 x e^{\lambda_2 x}$$

Dabei sind $\lambda_i, \underline{v}_i$ Eigenwert-Eigenvektor-Paare und λ_2 ist doppelter Eigenwert. Setzen Sie den dritten Teil in das DGL-System ein. Löst er tatsächlich das homogene DGL-System?

Lösung:

Dritter Teil im Ansatz: $\underline{y}_{h3} = \underline{v}_2 x e^{2x}, \Rightarrow \underline{y}'_{h3} = \underline{v}_2 (2x+1) e^{2x}$

In DGL $\underline{y}' = A\underline{y}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} E\underline{v}_2(2x+1)\cancel{e^{2x}} &= A\underline{v}_2 x \cancel{e^{2x}} && \vert - A\underline{v}_2 x \\ \underbrace{(2E-A)\underline{v}_2}_{=0,\text{Def. EW/EV}}\, x + \underline{v}_2 &= \underline{0} && \\ \underline{v}_2 &= \underline{0} && ↯\,\text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Der dritte Teil des naiven Ansatzes löst die homogene DGL **nicht**.

A2 Wann eindeutige RWA-Lösung?

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes 11.52, für welche Werte von $\mu^2 = \frac{F}{EJ}$ die RWA 25.12.c i) eine eindeutige Lösung, ii) keine eindeutige Lösung hat.

Hinweis: Die Determinante aus Satz 11.52 adaptiert auf eine lineare DGL 4. Ordung ist

$$\det \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) & R_1(y_3) & R_1(y_4) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) & R_2(y_3) & R_2(y_4) \\ R_3(y_1) & R_3(y_2) & R_3(y_3) & R_3(y_4) \\ R_4(y_1) & R_4(y_2) & R_4(y_3) & R_4(y_4) \end{pmatrix},$$

wobei $R_{1\ldots4}$ die 4 Randbedingungen und $y_{1\ldots4}$ die 4 Lösungen der homogenen DGL sind.

Lösung:

Zugehörige homogene DGL: $w^{(4)} + \mu^2 w'' = 0$,

Charakteristische Gleichung: $\lambda^4 + \mu^2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0;\quad \lambda_{1,2} = \pm\mu i$ mit $\mu = \sqrt{\frac{F}{EJ}} > 0$

homogene Lsg: $w_h(x) = C_1 \underbrace{1}_{y_1} + C_2 \underbrace{x}_{y_2} + C_3 \underbrace{\cos(\mu x)}_{y_3} + C_4 \underbrace{\sin(\mu x)}_{y_4}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos(\mu l) & \sin(\mu l) \\ 0 & 0 & -\mu^2\cos(\mu l) & -\mu^2\sin(\mu l) \end{pmatrix} = -l \cdot 1 \cdot (-\mu^2) \cdot (-\mu^2 \sin(\mu l))$$

(Entwicklung nach der 2. Spalte, dann 1. Spalte, ...)

$$\det \ldots \begin{cases} \neq 0, & \text{wenn } \mu l \neq k\pi, k \in \mathbb{N}: \text{ eind. Lsg. (i)} \\ = 0, & \text{wenn } \mu l = k\pi, k \in \mathbb{N}: \text{ Lsg. nicht eind., d.h. keine oder } \infty \text{ viele Lsgn. (ii)} \end{cases}$$

A3 Unterschied RWA – EWA

Machen Sie sich den Unterschied zwischen Randwertaufgabe und Eigenwertaufgabe klar, in dem Sie den folgenden Lückentext füllen.
Vorschläge für die Lücken:
Eigenfunktionen, Eigenwerte, variablen, feststehenden, keine, unendlich viele, eindeutige
Lösung:
Eine Randwertaufgabe besteht aus einer **feststehenden** DGL mit Randbedingungen und hat genau eine oder keine oder unendlich viele Lösungen.
Hingegen besteht eine Eigenwertaufgabe aus einer **variablen** DGL(λ) mit Randbedingungen und hat für spezielle Werte der Variablen, den **Eigenwerten**, **unendlich viele** Lösungen (die die Randbedingungen erfüllen), nämlich beliebige Vielfache der zugehörigen **Eigenfunktionen**.

A4 Von der Funktion zur DGL/AWA

Sie haben gelernt, dass Differentialgleichungen (zusammen mit Anfangswerten) Funktionen (die Lösungen) bestimmen, auch wenn diese evtl. nicht elementar sind und z.B. nur mit Potenzreihen beschrieben werden.
Hier sollen Sie quasi rückwärts vorgehen: Gegeben: Funktion, Gesucht: DGL/AWA.
Lösung:

Funktion	DGL, AWA
Polynom vom Grad n	$y^{n+1} = 0, y^k(0) = y_k, k = 0, \ldots, n$
$e^{\alpha x}$	$y' = \alpha x, y(0) = 1$
$\ln x$	$xy' = 1, y(1) = 0$
$\cos(\omega x)$	$y'' + \omega^2 y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
$\sin(\omega x)$	$y'' + \omega^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = \omega$
Bessel-Funktionen	$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$
eigenes Beispiel	