

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

### 2. Woche – Trigonometrische Reihen, Fourier-Reihe, $L^2(-\pi, \pi)$

#### A1 Trigonometrische Polynome

Sie haben die [trigonometrischen Polynome \(Def. 12.2\)](#) kennen gelernt.

- (a) Unter welcher Bedingung an die komplexen Koeffizienten  $c_k$  und  $c_{-k}$  ist  $P_n(x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x$ ?
- (b) Geben Sie die  $c_k, k = 0, 1, 2$  an für

$$P_2(x) = 1 + 2 \cos(x) + 3 \sin(2x) = \sum_{k=-2}^2 c_k e^{ikx}$$

- (c) Geben Sie für

$$P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = A_1 (\cos(\varphi) \cos(x) - \sin(\varphi) \sin(x)) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx}$$

$c_1, |c_1|$  sowie  $\arg(c_1)$  an.

#### A2 Trigonometrisches Polynom = endliche Fourier-Reihe

Zeichnen sie die folgenden Funktionen im Intervall  $[-\pi, 2\pi]$ :

- (a)  $\cos(x), -\sin(x)$ ,
- (b)  $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ , 'addieren' Sie die Funktionen aus (a) graphisch.
- (c) Lesen Sie vom Graphen (b) Amplitude und Phase, also  $A, \varphi$  für  $f(x) = A \cos(x + \varphi)$  ab.

#### A3 Knowing $c_0$ and $c_1$ is knowing the signal $P_1(x)$

Gegeben sind die folgenden Koeffizienten der **reellen** trigonometrischen Polynome  $P_1(x) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx}$ . Geben Sie jeweils  $c_{-1}$  an und zeichnen Sie das zugehörige  $P_1(x)$  im Intervall  $[-\pi, 2\pi]$ :

- (a)  $c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$ ,
- (b)  $c_0 = 1, c_1 = -\frac{i}{2}$ ,
- (c)  $c_0 = 1, c_1 = \frac{1+i}{2}$ .

#### A4 **Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung: Konvergenz**

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

- (a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?
- (b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an  $a_k, b_k$ ) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle  $x$**  zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{aligned}$$

#### A5 **$L^2$ -Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\pi, \pi)$**

Sie haben das  **$L^2$ -Skalarprodukt (Def. 12.5)**  $\langle p, q \rangle$  mit  $p, q : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$  kennen gelernt.

- (a) Ist  $\langle p, p \rangle$  stets reell?
- (b) Ist  $\langle p, q \rangle$  stets reell?
- (c) Geben Sie die  $L^2$ -Normen  $\|\cos(x)\|_2$  und  $\|e^{ix}\|_2$  an. Gehören die Funktionen  $\cos(x)$  und  $e^{ix}$  zum  $L^2(-\pi, \pi)$ , dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen?
- (d) Gegeben ist die Funktionenschar  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \alpha \in \mathbb{R}, \text{ für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$   
Für welche  $\alpha$  gehört  $f(x)$  zum  $L^2(-\pi, \pi)$ ?

#### **Zusatz: $L^2$ -Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$**

Anstelle  $2\pi$ -periodischer Funktionen auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  wollen wir jetzt  $T$ -periodische Funktionen im Intervall  $[-T/2, T/2]$  betrachten.

- (a) Geben Sie die Sinus- und Kosinus-Funktion mit der Periode  $T$  an und überprüfen Sie, dass diese tatsächlich  $T$ -periodisch sind.
- (b) Wie berechnet sich im  $L^2(-T/2, T/2)$  das Skalarprodukt bzw. die  $L^2$ -Norm?
- (c) Geben Sie Skalarprodukt und Norm Ihrer Funktionen aus (a) an.