

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

### 2. Woche – Projektion auf orthogonale Basis, Bedeutung $c_0$ , keine punktweise Konvergenz

#### Projektion und Optimalität

##### A1 Projektion auf orthogonale Basis

In [Ma1](#), [Bsp. 6.28](#) haben Sie die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots$$

kennen gelernt und erfahren, dass die Faktoren  $\lambda_i$  im Falle einer orthogonalen Basis durch Projektion des Vektors  $\underline{v}$  auf die Basisvektoren mit Hilfe von Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Vektornorm  $\|\cdot\|$  bestimmt werden:

$$\lambda_i = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle}{\|\underline{b}^i\|^2} \quad (0.1)$$

- Wiederholen Sie die Begriffe Vektorraum, orthogonale Basis, Skalarprodukt und Vektornorm.
- Woran erkennen Sie, dass zwei (Basis-)Vektoren im (Vektorraum)  $\mathbb{R}^2$  zueinander orthogonal sind?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum)  $\mathbb{R}^3$  eine **orthogonale** Basis bilden?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum)  $\mathbb{R}^3$  eine **orthonormale** Basis bilden?
- In  $C[-\pi, \pi]$  ist der Raum der auf  $[-\pi, \pi]$  stetigen Funktionen.
  - Woran erkennen Sie, ob die beiden Elemente dieses Vektorraums  $\underline{b}^1 = \cos(x)$  und  $\underline{b}^2 = \sin(x)$  zueinander orthogonal sind?
  - Welchen Unterraum des  $C[-\pi, \pi]$  spannen diese beiden Vektoren auf, d.h. welche Funktionen lassen sich als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen.
  - Wie bestimmen Sie für eine Funktion  $f(x)$  aus dem Unterraum, s. (ii), die Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2$  bzgl. dieser Basis:

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)?$$

##### A2 [Zusatz] für Studiengang ET: Legendre-Polynome

Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie eine weitere Menge von (unendlich vielen) Funktionen verwenden (um diese zu **überlagern**), die sogenannten **Legendre-Polynome**. Diese sind auf dem Intervall  $[-1, 1]$  zu einander orthogonal und wie folgt definiert:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Geben Sie  $P_0(x), P_1(x)$  und  $P_2(x)$  an.
- Skizzieren Sie  $P_0(x), P_1(x)$  und  $P_2(x)$  im Intervall  $[-1, 1]$ .

- (c) **Sehen** Sie in (b), dass  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$  und  $P_2(x)$  jeweils paarweise zueinander orthogonal sind? (Funktionen 'grafisch multiplizieren und integrieren' = Skalarprodukt)

Bemerkung: anstelle obiger Ableitungsdefinition ergeben sich die Legendre-Polynome auch aus folgendem rekursiven Zusammenhang:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \text{ mit } P_0(x) = 1, P_1(x) = x, n = 1, 2, \dots$$

### A3 Optimal - in welchem Sinne?

Die Fourier-Polynome verwenden **optimale** Fourier-Koeffizienten  $c_k$ , s. [Bsp. 12.11 A](#)  
In welchem Sinne sind die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  optimal?

### Verstehen durch Sehen

#### A4 $c_0$ 'sehen'!

Betrachtet wird das ( $2\pi$ -periodische) Rechtecksignal, das im Intervall  $[-\pi, \pi]$  wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Skizzieren Sie das Signal und lesen Sie aus dem Graphen den (zeitlichen) Mittelwert ab.
- Berechnen Sie  $c_0 = a_0$  nach [12.12](#) bzw. [12.13](#) und vergleichen mit (a)
- Zeichnen Sie zu  $f(x)$  den Graphen von  $P_0(x)$  dazu.
- Reflektieren Sie den Zusammenhang zwischen  $c_0 = a_0$  und in der ET gebräuchlichen Begriffen wie Gleichstromanteil, DC-component und Offset.

#### A5 Verstehen durch Zeichnen

Die  $2\pi$ -periodische Dreiecksfunktion  $f(x) = |x|$  für  $|x| \leq \pi$  (periodisch fortsetzen!) wird durch folgende Funktionenreihe dargestellt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k_0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

- Ist das eine Fourier-Reihe?
- Skizzieren Sie die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$ .
- Skizzieren Sie die ersten 3 Summanden  $\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{4}{\pi} \cos x$ ,  $-\frac{4}{\pi} \frac{\cos 3x}{3^2}$  und deren Summe im Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$  und vergleichen Sie mit (b).

## Konvergenz - ja/nein/welche?

### A6 Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung: Konvergenz

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

- (a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?
- (b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an  $a_k, b_k$ ) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle  $x$**  zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{aligned}$$

### A7 [Zusatz:] Konvergenz aber nicht an jedem Punkt

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten  $\text{:)}$  der  $2\pi$ -periodischen Funktion, die im Intervall  $[-\pi, \pi]$  wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} !$$

Skizzieren Sie  $f!$  In welchen Punkten  $x \in [-\pi, \pi]$  konvergiert die Fourier-Reihe gegen  $f(x)$ ?

### A8 Konvergenz oder nicht

Für die  $2\pi$ -periodische Rechteckfunktion  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

lautet die Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \quad (*) \end{aligned}$$

- (a) Zeichnen Sie die  $2\pi$ -periodische Rechteck-Funktion. Ist diese Funktion stetig?
- (b) Jede endliche Summe von stetigen Funktionen, z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen ist stetig. Gilt dies auch für eine unendliche Summe von stetigen Funktionen wie die Fourier-Reihe?
- (c) Die Fourier-Reihe  $F(x)$  (\*) konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Funktion  $f(x)$ . Geben Sie die Funktionswerte  $F(0)$  und  $f(0)$  an. Überlegen Sie, ob die Reihe (\*) auch punktweise gegen die Funktion  $f(x)$  konvergiert, s. [Ma3, Def. 12.10](#).