

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 2. Woche – Projektion auf orthogonale Basis, Bedeutung c_0 , keine punktweise Konvergenz

Projektion und Optimalität

A1 Projektion auf orthogonale Basis

In [Ma1, Bsp. 6.28](#) haben Sie die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Vektoren einer Basis

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}^1 + \lambda_2 \underline{b}^2 + \dots$$

kennen gelernt und erfahren, dass die Faktoren λ_i im Falle einer orthogonalen Basis durch Projektion des Vektors \underline{v} auf die Basisvektoren mit Hilfe von Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Vektornorm $\|\cdot\|$ bestimmt werden:

$$\lambda_i = \frac{\langle \underline{v}, \underline{b}^i \rangle}{\|\underline{b}^i\|^2} \quad (0.1)$$

- Wiederholen Sie die Begriffe Vektorraum, orthogonale Basis, Skalarprodukt und Vektornorm.
- Woran erkennen Sie, dass zwei (Basis-)Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^2 zueinander orthogonal sind?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^3 eine **orthogonale** Basis bilden?
- Woran erkennen Sie, dass drei Vektoren im (Vektorraum) \mathbb{R}^3 eine **orthonormale** Basis bilden?
- In $C[-\pi, \pi]$ ist der Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen.
 - Woran erkennen Sie, ob die beiden Elemente dieses Vektorraums $\underline{b}^1 = \cos(x)$ und $\underline{b}^2 = \sin(x)$ zueinander orthogonal sind?
 - Welchen Unterraum des $C[-\pi, \pi]$ spannen diese beiden Vektoren auf, d.h. welche Funktionen lassen sich als Linearkombination dieser beiden Basisvektoren darstellen.
 - Wie bestimmen Sie für eine Funktion $f(x)$ aus dem Unterraum, s. (ii), die Koeffizienten λ_1, λ_2 bzgl. dieser Basis:

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)?$$

Kurzlösung:

- ...
- $\langle \underline{b}^1, \underline{b}^2 \rangle = 0$.
- $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = 0$ für $i \neq j$.
- $\langle \underline{b}^i, \underline{b}^j \rangle = \delta_{i,j}$ (Kronecker-Delta).
- $\langle \cos(x), \sin(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(x) dx = 0$.
 - $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = A \cos(x + \varphi)$, $A, \varphi \in \mathbb{R}$.
 - analog [0.1](#).

$$\lambda_1 = \frac{\langle f(x), \cos(x) \rangle}{\langle \cos(x), \cos(x) \rangle}, \quad \lambda_2 = \frac{\langle f(x), \sin(x) \rangle}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle}$$

A2 [Zusatz] für Studiengang ET: Legendre-Polynome

Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie eine weitere Menge von (unendlich vielen) Funktionen verwenden (um diese zu **überlagern**), die sogenannten **Legendre-Polynome**. Diese sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ zu einander orthogonal und wie folgt definiert:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Geben Sie $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ an.
- (b) Skizzieren Sie $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ im Intervall $[-1, 1]$.
- (c) **Sehen** Sie in (b), dass $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ jeweils paarweise zueinander orthogonal sind? (Funktionen 'grafisch multiplizieren und integrieren' = Skalarprodukt)

Bemerkung: anstelle obiger Ableitungsdefinition ergeben sich die Legendre-Polynome auch aus folgendem rekursiven Zusammenhang:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \text{mit } P_0(x) = 1, P_1(x) = x, n = 1, 2, \dots$$

Kurzlösung:

(a) $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$

A3 Optimal - in welchem Sinne?

Die Fourier-Polynome verwenden **optimale** Fourier-Koeffizienten c_k , s. [Bsp. 12.11 A](#)
In welchem Sinne sind die Fourier-Koeffizienten c_k optimal?

Kurzlösung: c_k so, dass Abstand (L^2 -Norm) $f(x) - P_n(x)$ minimal.

Verstehen durch Sehen

A4 c_0 'sehen'!

Betrachtet wird das (2π -periodische) Rechtecksignal, das im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie das Signal und lesen Sie aus dem Graphen den (zeitlichen) Mittelwert ab.

- (b) Berechnen Sie $c_0 = a_0$ nach 12.12 bzw. 12.13 und vergleichen mit (a)
- (c) Zeichnen Sie zu $f(x)$ den Graphen von $P_0(x)$ dazu.
- (d) Reflektieren Sie den Zusammenhang zwischen $c_0 = a_0$ und in der ET gebräuchlichen Begriffen wie Gleichstromanteil, DC-component und Offset.

Kurzlösung:

- (d) $c_0 = a_0 =$ zeitlicher Mittelwert = Gleichstromanteil = ...

A5 Verstehen durch Zeichnen

Die 2π -periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$ (periodisch fortsetzen!) wird durch folgende Funktionenreihe dargestellt

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k_0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}
 \end{aligned}$$

- (a) Ist das eine Fourier-Reihe?
- (b) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.
- (c) Skizzieren Sie die ersten 3 Summanden $\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi} \cos x, -\frac{4}{\pi} \frac{\cos 3x}{3^2}$ und deren Summe im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und vergleichen Sie mit (b).

Kurzlösung:

- (a) Ja!

Konvergenz - ja/nein/welche?

**A6 Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung:
Konvergenz**

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

- (a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?
- (b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an a_k, b_k) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle x** zu ermitteln:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)
 \end{aligned}$$

Kurzlösung:

- (a) notwendiges Kriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium (QK), Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Minoranten-Kriterium,
 (b) Die Fourier-Reihe konvergiert **für alle** x wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergiert.

A7 [Zusatz:] Konvergenz aber nicht an jedem Punkt

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten \therefore) der 2π -periodischen Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi]$ wie folgt gegeben ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 2x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Skizzieren Sie f ! In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$?

Kurzlösung:

Skizze: ein Kamm mit 'Zinken' bei $-3 : 0.5 : 3$

f ist nur an endlich vielen Punkten ungleich Null \Rightarrow alle a_k, b_k sind gleich Null.

Die Fourierreihe konvergiert also wunderbar, allerdings nicht für alle x gegen $f \dots$

Sie konvergiert folglich nicht punktweise gegen f sondern nur im \dots

A8 Konvergenz oder nicht

Für die 2π -periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

lautet die Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \quad (*) \end{aligned}$$

- (a) Zeichnen Sie die 2π -periodische Rechteck-Funktion. Ist diese Funktion stetig?
 (b) Jede endliche Summe von stetigen Funktionen, z.B. Sinus- und Cosinus-Funktionen ist stetig. Gilt dies auch für eine unendliche Summe von stetigen Funktionen wie die Fourier-Reihe?
 (c) Die Fourier-Reihe $F(x)$ (*) konvergiert im quadratischen Mittel gegen die Funktion $f(x)$. Geben Sie die Funktionswerte $F(0)$ und $f(0)$ an. Überlegen Sie, ob die Reihe (*) auch punktweise gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, s. [Ma3, Def. 12.10](#) .

Kurzlösung:

- (a) nicht stetig.
- (b) offenbar nicht.
- (c) Da $F(0) = 0 \neq 1 = f(0)$ konvergiert die Fourier-reihe $F(x)$ **nicht punktweise** gegen $f(x)$, sondern nur **im quadratischen Mittel**.