

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 2. Woche – Trigonometrische Reihen, Fourier-Reihe, $L^2(-\pi, \pi)$

A1 Trigonometrische Polynome

Sie haben die [trigonometrischen Polynome \(Def. 12.2\)](#) kennen gelernt.

- (a) Unter welcher Bedingung an die komplexen Koeffizienten c_k und c_{-k} ist $P_n(x) \in \mathbb{R}$ für alle x ?
- (b) Geben Sie die $c_k, k = 0, 1, 2$ an für

$$P_2(x) = 1 + 2 \cos(x) + 3 \sin(2x) = \sum_{k=-2}^2 c_k e^{ikx}$$

- (c) Geben Sie für

$$P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = A_1 (\cos(\varphi) \cos(x) - \sin(\varphi) \sin(x)) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx}$$

$c_1, |c_1|$ sowie $\arg(c_1)$ an.

Kurzlösung:

- (a) $P_n(x)$ ist reell, wenn alle $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, also $c_0 \in \mathbb{R}$ und $c_k = \overline{c_{-k}}, k = 1, \dots, n$.
- (b) Wegen $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$, s. VL, ist $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ (*), also

$$c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = -i\frac{3}{2}$$

Merke: $\operatorname{Re}(c_k) =$ Hälfte des Koeffizienten vor $\cos(kx)$.
 $-\operatorname{Im}(c_k) =$ Hälfte des Koeffizienten vor $\sin(kx)$.

- (c) $P_1(x) = A_1 \cos(x + \varphi) = \underbrace{A_1 (\cos(\varphi))}_{a_1} \cos(x) - \sin(\varphi) \sin(x) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx}$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1) \text{ s. (*), also } c_1 = \frac{A_1}{2} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$|c_1| = \frac{A_1}{2} \text{ und } \arg(c_1) = \varphi.$$

Merke: Betrag und Winkel von c geben die (halbe) Amplitude und die Phase der harmonischen Schwingung an.

A2 Trigonometrisches Polynom = endliche Fourier-Reihe

Zeichnen sie die folgenden Funktionen im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

- (a) $\cos(x), -\sin(x)$,
- (b) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$, 'addieren' Sie die Funktionen aus (a) graphisch.

- (c) Lesen Sie vom Graphen (b) Amplitude und Phase, also A, φ für $f(x) = A \cos(x + \varphi)$ ab.

Kurzlösung:

- (c) $A = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

A3 Knowing c_0 and c_1 is knowing the signal $P_1(x)$

Gegeben sind die folgenden Koeffizienten der **reellen** trigonometrischen Polynome $P_1(x) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ikx}$. Geben Sie jeweils c_{-1} an und zeichnen Sie das zugehörige $P_1(x)$ im Intervall $[-\pi, 2\pi]$:

- (a) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$,
(b) $c_0 = 1, c_1 = -\frac{1}{2}$,
(c) $c_0 = 1, c_1 = \frac{1+i}{2}$.

Kurzlösung: $c_{-1} = \overline{c_1}$.

- (a) $1 + \cos(x)$,
(b) $1 + \sin(x)$,
(c) $1 + \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$, s. A5 c).

**A4 Fourier-Reihe = trigonometrisches Polynom unendl. Ordnung:
Konvergenz**

Erinnern Sie sich an den Abschnitt Folgen und Reihen aus Mathematik 1.

- (a) Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?
(b) Nutzen Sie das Majorantenkriterium, um eine (hinreichende) Bedingung (an a_k, b_k) für die Konvergenz der Fourier-Reihe, **für alle x** zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k) \text{ mit } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ und } \varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{aligned}$$

Kurzlösung:

- (a) notwendiges Kriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium (QK), Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Minoranten-Kriterium,

(b) Die Fourier-Reihe konvergiert **für alle** x wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ konvergiert.

A5 L^2 -Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\pi, \pi)$

Sie haben das L^2 -Skalarprodukt (Def. 12.5) $\langle p, q \rangle$ mit $p, q : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ kennen gelernt.

- (a) Ist $\langle p, p \rangle$ stets reell?
- (b) Ist $\langle p, q \rangle$ stets reell?
- (c) Geben Sie die L^2 -Normen $\|\cos(x)\|_2$ und $\|e^{ix}\|_2$ an. Gehören die Funktionen $\cos(x)$ und e^{ix} zum $L^2(-\pi, \pi)$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen?
- (d) Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \alpha \in \mathbb{R}, \text{ für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$
Für welche α gehört $f(x)$ zum $L^2(-\pi, \pi)$?

Kurzlösung:

- (a) Ja. $\langle p, p \rangle = \|p\|_2^2$.
- (b) Nein. Beispiele p, q für $\langle p, q \rangle$ reell/nicht reell nennen lassen.
- (c) $\|\cos(x)\|_2 = \sqrt{\pi}$ und $\|e^{ix}\|_2 = \sqrt{2\pi}$.
Ja, $\cos(x), e^{ix} \in L^2(-\pi, \pi)$, da $\|\dots\|_2$ endlich.
- (d) Für $\alpha > -\frac{1}{2}$: $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$. Es gibt also Funktionen, die integrierbar (für $\alpha > -1$) aber nicht quadratintegrierbar sind.

Zusatz: L^2 -Skalarprodukt,-Norm und $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

Anstelle 2π -periodischer Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wollen wir jetzt T -periodische Funktionen im Intervall $[-T/2, T/2]$ betrachten.

- (a) Geben Sie die Sinus- und Kosinus-Funktion mit der Periode T an und überprüfen Sie, dass diese tatsächlich T -periodisch sind.
- (b) Wie berechnet sich im $L^2(-T/2, T/2)$ das Skalarprodukt bzw. die L^2 -Norm?
- (c) Geben Sie Skalarprodukt und Norm Ihrer Funktionen aus (a) an.

Kurzlösung:

(a) $\cos(2\pi x/T), \sin(2\pi x/T)$.

Eine Funktion $f(x)$ heißt T -periodisch, falls

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \checkmark$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \checkmark$$

(b)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\|_{L^2([-T/2, T/2])} := \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx}$$

(c)

$$\langle \cos(2\pi x/T), \sin(2\pi x/T) \rangle := \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi x/T) \sin(2\pi x/T) dx = 0$$

$$\|\cos(2\pi x/T)\|_{L^2([-T/2, T/2])}^2 := \int_{-T/2}^{T/2} |\cos(2\pi x/T)|^2 dx = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin(2\pi x/T)\|_{L^2([-T/2, T/2])}^2 := \int_{-T/2}^{T/2} |\sin(2\pi x/T)|^2 dx = \frac{T}{2}$$