Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

3. Woche – Fourier-Reihen, Spektrum und Parseval

Fourier-Reihen Periode 2π

Als Faustregel gilt:

- ist f stetig (durch periodische Fortsetzung) auf $\mathbb{R}$, so ist $|c_k| \sim \frac{1}{k^2}$
- ist f n-mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so ist $|c_k| \sim \frac{1}{k^{2+n}}$

A1 $c_k \sim \frac{1}{k^?}$

Sie kennen aus Übung2, A8 bereits die Fourier-Reihe der 2π-periodische Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1} \end{aligned}$$

und aus Übung2, A5 die Fourier-Reihe der 2π-periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die 2π-periodische Dreiecks- und Rechteck-Funktion. Welche der beiden Funktionen ist stetig?

(b) Betrachten Sie die Proportionalität der Fourier-Koeffizienten beider Reihen bzgl. k und vergleichen Sie mit der obigen Faustregel.

A2 $a_k, b_k \rightsquigarrow$ **stetig oder nicht**

Betrachtet wird die folgende Fourier-Reihe einer reellen Funktion $f(x)$

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{4}{k^2}\cos(kx) - \tfrac{4\pi}{k}\sin(kx)\right).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass die reellen Fourier-Koeffizient a_k bzw. b_k den geraden bzw. den ungeraden Anteil der rellen Funktion $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ widerspiegeln. **Hinweis:** Nutzen Sie Bem. 12.13 . Welchen Wert nimmt ein Integral über eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Integrationsbereich an?

(b) Identifizieren Sie in obiger Reihe die a_k bzw. b_k. Betrachten Sie deren Verhalten für $k \to \infty$ und machen Sie mit Hilfe obiger Faustregel eine Aussage darüber, ob der gerade oder ungerade Anteil eine stetige Funktion ist.

A3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Geradheit/Ungeradheit

Betrachtet wird folgende Funktion: $f_{2\pi}(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

(a) Setzen Sie die Funktion direkt zu einer 2π-periodischen Funktion $f(x)$ fort und skizzieren Sie die Funktionskurve von $f(x)$. Stellen Sie fest, welche der Eigenschaften Stetigkeit, Differenzierbarkeit (jeweils stückweise oder auf ganz $\mathbb{R}$) bzw. Geradheit/Ungeradheit die Funktion $f(x)$ besitzt.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und stellen Sie die Fourierreihe auf.

Fourier-Reihen Periode T

A4 Gegeben: Signal, gesucht: Periodendauer bzw. Grundfrequenz

Bestimmen Sie die Periode T und die Fourierkoeffizienten a_k, b_k $k \in \mathbb{N}$ der Funktion

$$u(t) = u_a \cos(2\pi f_a t) + u_b \cos(2\pi f_b t)$$

für die Fälle

(a) $f_b = 2f_a$ (b) $f_b = \frac{3}{2} f_a$[1].

(Hinweis: Der Weg über die Berechnung der a_k, b_k mittels der Integralformel ist nicht der kürzeste. Die reelle Fourierreihe steht schon da!)

A5 Zusammenhang a_k, b_k, c_k und 'komplexer Zeiger' und 'Phasor'

Geben Sie für das folgende Signal die Koeffizienten der reellen UND der komplexen Fourierreihe sowie den in der VL Dynamische Netzwerke genutzten 'komplexen (Effektivwert-) Zeiger' $\underline{U}$ an:

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{T}$$

Für Studiengang ET: Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie den 'Phasor' kennen lernen. Geben Sie den Phasor für obiges Signal als Funktion von c_1 an.

A6 Brücke zur $j\omega-$Rechnung

Gegeben ist die Darstellung des **reellen** Signals

$$P_1(t) = \sum_{k=-1}^{1} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit } c_0 = 0 \text{ und } c_1 \in \mathbb{C}$$

Wenden Sie Satz 12.24 an zur Differentiation bzw. Integration dieses Signals an und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit ET3 Folien 1 - 10++.

[1] Das Konzept des nicht klingenden aber gehörten Grundtons wird im Orgelbau verwendet, s. Residualton

Spektrum und Parseval

A7 Spektrum c_k: k-Achse = Frequenz-Achse

(a) Machen Sie sich klar, dass jeder Fourier-Koeffizient c_k bzw. X_k einer bestimmten Frequenz zugeordnet ist. $|c_k|$ bzw. $|X_k|$ entsprechen der (halben) Amplitude einer im Signal (als Summand) enthaltenen harmonischen Schwingung welcher Frequenz?

(b) Machen Sie sich klar, dass die 'k-Achse' des **Spektrums** ($|c_k|$ bzw.) $|X_k|$ eine Frequenz-Achse ist und markieren Sie k-Werte und Frequenzwerte an einem Zahlenstrahl (eine x-Achse mit zwei Beschriftungen).

A8 [Zusatz:] Parseval'sche Formel und Effektivwert

Gegeben sind die reelle und die komplexe Fourierreihe eines Signals:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

(a) Verwenden Sie beide Reihendarstellungen um das Quadrat des Effektivwerts (den sogenannten quadratischen Mittelwert), s. ET3 Folie 1 - 4 des Signals zu berechnen:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t}$$

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T} \int_0^T \sum \ldots \cdot \sum \ldots \mathrm{d}\,t$$

Orthogonalität der Basisfunktionen nutzen!

(b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Parsevalschen Formel (s. Systemtheorie 1) und der Parseval'schen Gleichung (Ma3, Satz 12.19) .