

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 4. Woche – Fourier-Reihen, Spektrum und Parseval

Fourier-Reihen Periode 2π

A1 $c_k \sim \frac{1}{k^2}$

Sie kennen aus [Übung3, A5](#) bereits die Fourier-Reihe der 2π -periodische Rechteckfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1, & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \end{aligned}$$

und aus [Übung3, A5](#) die Fourier-Reihe der 2π -periodische Dreiecksfunktion $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

- Zeichnen Sie die 2π -periodische Dreiecks- und Rechteck-Funktion. Welche der beiden Funktionen ist stetig?
- Betrachten Sie die Proportionalität der Fourier-Koeffizienten beider Reihen bzgl. k und vergleichen Sie mit der Faustregel s. [Ma3, nach Bsp. 12.23](#).

Kurzlösung:

- Dreieck stetig, Rechteck nicht stetig.
- Rechteck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k} \rightsquigarrow$ unstetig ; Dreieck-Reihe $c_k \sim \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow$ stetig. Faustregel bestätigt.

A2 $a_k, b_k \rightsquigarrow$ stetig oder nicht

Betrachtet wird die folgende Fourier-Reihe einer reellen Funktion $f(x)$

$$F(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2} \cos(kx) - \frac{4\pi}{k} \sin(kx) \right).$$

- (a) Machen Sie sich klar, dass die reellen Fourier-Koeffizient a_k bzw. b_k den geraden bzw. den ungeraden Anteil der reellen Funktion $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ widerspiegeln.
Hinweis: Nutzen Sie [Bem. 12.13](#). Welchen Wert nimmt ein Integral über eine ungerade Funktion über einen symmetrischen Integrationsbereich an?
- (b) Identifizieren Sie in obiger Reihe die a_k bzw. b_k . Betrachten Sie deren Verhalten für $k \rightarrow \infty$ und machen Sie mit Hilfe der Faustregel aus [Ma3, nach Bsp. 12.23](#) eine Aussage darüber, ob der gerade oder ungerade Anteil eine stetige Funktion ist.

Kurzlösung:

(a)

$$F(x) = \underbrace{\frac{4}{3}\pi^2}_{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{4}{k^2}}_{a_k} \cos(kx) - \underbrace{\frac{4\pi}{k}}_{b_k} \sin(kx) \right).$$

- (b) Wegen $a_k \sim \frac{1}{k^2}$ ist der gerade Anteil der Funktion stetig (ist bei periodischer Fortsetzung von auf $(-\pi, \pi]$ -stetigen Funktionen immer so). Mit $\sum \frac{1}{k^2}$ existiert eine konvergierende Majorante, die gleichmäßige Konvergenz absichert und damit Unstetigkeit ausschließt.

A3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Geradheit/Ungeradheit

Betrachtet wird folgende Funktion: $f_{2\pi}(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

- (a) Setzen Sie die Funktion direkt zu einer 2π -periodischen Funktion $f(x)$ fort und skizzieren Sie die Funktionskurve von $f(x)$. Stellen Sie fest, welche der Eigenschaften Stetigkeit, Differenzierbarkeit (jeweils stückweise oder auf ganz \mathbb{R}) bzw. Geradheit/Ungeradheit die Funktion $f(x)$ besitzt.
- (b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ und stellen Sie die Fourierreihe auf.

Kurzlösung:

(a) $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $(0, 2\pi]$.

direkte period. Fortsetzung:

$$f(x) = f_{2\pi}(x - 2\pi n) = (x - 2\pi n)^2, 2n\pi < x < 2(n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion $f(x)$ ist stückweise stetig und stückweise glatt, aber weder gerade noch ungerade.

Fourierkoeffizienten: Aus Periodizitätsgründen ($e^{ikx} = e^{ik(x+2\pi)}$) läßt sich das Integrationsintervall bei der Berechnung der Koeffizienten von $[-\pi, \pi]$ auf $[0, 2\pi]$ ver-

schieben.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x}{k^2} \cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{k^2}.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x}{k^2} \sin(kx) - \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right) \cos(kx) \right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{k}.$$

Folglich ist die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2} \cos(kx) - \frac{4\pi}{k} \sin(kx) \right).$$

Fourier-Reihen Periode T

A4 Gegeben: Signal, gesucht: Periodendauer bzw. Grundfrequenz

Bestimmen Sie die Periode T und die Fourierkoeffizienten a_k, b_k $k \in \mathbb{N}$ der Funktion

$$u(t) = u_a \cos(2\pi f_a t) + u_b \cos(2\pi f_b t)$$

für die Fälle

$$(a) \quad f_b = 2f_a \qquad (b) \quad f_b = \frac{3}{2}f_a.$$

(Hinweis: Der Weg über die Berechnung der a_k, b_k mittels der Integralformel ist nicht der kürzeste. Die reelle Fourierreihe steht schon da!)

Kurzlösung:

Bestimmen eine Grundfrequenz f_0 , von der die im Signal enthaltenen Frequenzen **ganze** Vielfache sind. (Die Periodendauer ist dann $T = \frac{1}{f_0}$.)

(a) $f_0 = f_a$ also $a_1 = u_a, a_2 = u_b, a_k = 0$ für $k \neq 1, 2$ und $b_k = 0$ für alle k .

A5 Zusammenhang a_k, b_k, c_k und 'komplexer Zeiger' und 'Phasor'

Geben Sie für das folgende Signal die Koeffizienten der reellen UND der komplexen Fourierreihe sowie den in der VL Dynamische Netzwerke genutzten 'komplexen (Effektivwert-) Zeiger' \underline{U} an:

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{ mit } f_0 = \frac{1}{T}$$

Für Studiengang ET: Im Fach Theoretische Elektrotechnik werden Sie den 'Phasor' kennen lernen. Geben Sie den Phasor für obiges Signal als Funktion von c_1 an.

Kurzlösung:

Per Additionstheorem steht die reelle Fourier'reihe' praktisch da. Und die reellen Fourierkoeffizienten sind ablesbar. Koeffizienten nicht-vorhandener Summanden sind Null.

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \underbrace{\hat{U} \cos \varphi}_{a_1} \cos(2\pi f_0 t) - \underbrace{\hat{U} \sin \varphi}_{b_1} \sin(2\pi f_0 t)$$

Komplexe Fourier'reihe':

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2 \operatorname{Re}\left\{\frac{\hat{U}}{2} e^{i(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\} = 2 \operatorname{Re}\left\{\underbrace{\frac{\hat{U} e^{i\varphi}}{2}}_{c_1} e^{i2\pi f_0 t}\right\}$$

Also ist

$$c_1 = \frac{\hat{U} e^{i\varphi}}{2} = \frac{\hat{U}(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2} = \frac{a_1}{2} - i \frac{b_1}{2}$$

'komplexer (Effektivwert-)Zeiger':

$$u(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{\underbrace{\frac{\hat{U} e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}}_{\underline{U}} e^{i2\pi f_0 t}\right\}$$

also:

$$\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = \sqrt{2} c_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} - i \frac{b_1}{\sqrt{2}}$$

Merke: Bis auf verschiedene Faktoren entsprechen der 'komplexe (Effektivwert-)Zeiger' und der 'Phasor' c_1 : komplexer (Effektivwert-)Zeiger $\underline{U} = \sqrt{2} c_1$; Phasor $\underline{U} = 2 c_1$.

A6 Brücke zur $j\omega$ -Rechnung

Gegeben ist die Darstellung des **reellen** Signals

$$P_1(t) = \sum_{k=-1}^1 c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit } c_0 = 0 \text{ und } c_1 \in \mathbb{C}$$

Wenden Sie [Satz 12.24](#) an zur Differentiation bzw. Integration dieses Signals an und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit [ET3 Folien 1 - 10++](#).

Kurzlösung:

$$\frac{d P_1(t)}{d t} = \sum_{k=-1}^1 ik\omega c_k e^{ik\omega t} = i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega \bar{c}_1 e^{-i\omega t} \quad c_{-1} = \bar{c}_1 \text{ da reelles Signal}$$

$$\int P_1(t) d t = \sum_{\substack{k=-1 \\ k \neq 0}}^1 \frac{1}{ik\omega} c_k e^{ik\omega t} = \frac{1}{i\omega} c_1 e^{i\omega t} - \frac{1}{i\omega} \bar{c}_1 e^{-i\omega t} = 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i\omega} c_1 e^{i\omega t}\right)$$

Spektrum und Parseval

A7 Spektrum c_k : k -Achse = Frequenz-Achse

- (a) Machen Sie sich klar, dass jeder Fourier-Koeffizient c_k bzw. X_k einer bestimmten Frequenz zugeordnet ist. $|c_k|$ bzw. $|X_k|$ entsprechen der (halben) Amplitude einer im Signal (als Summand) enthaltenen harmonischen Schwingung welcher Frequenz?
- (b) Machen Sie sich klar, dass die ' k -Achse' des **Spektrums** ($|c_k|$ bzw. $|X_k|$) eine Frequenz-Achse ist und markieren Sie k -Werte und Frequenzwerte an einem Zahlenstrahl (eine x -Achse mit zwei Beschriftungen).

Kurzlösung:

- (a) c_k gehört zu $\cos(kx)$; X_k gehört $\cos(k\frac{2\pi}{T}x) = \cos(k\omega_0x)$.

A8 [Zusatz:] Parseval'sche Formel und Effektivwert

Gegeben sind die reelle und die komplexe Fourierreihe eines Signals:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

- (a) Verwenden Sie beide Reihendarstellungen um das Quadrat des Effektivwerts (den sogenannten quadratischen Mittelwert), s. [ET3 Folie 1 - 4](#) des Signals zu berechnen:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$
$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum \dots \cdot \sum \dots dt$$

Orthogonalität der Basisfunktionen nutzen!

- (b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Parsevalschen Formel (s. [Systemtheorie 1](#)) und der Parseval'schen Gleichung ([Ma3, Satz 12.19](#)).

Kurzlösung:

(a) Rechnen mit reeller Fourierreihe:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \cdot \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] dt \\ &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Merke:

Effektivwertquadrate der einzelnen Harmonischen addieren sich zum Effektivwertquadrat des Signals.

Rechnen mit komplexer Fourierreihe (da das Signal reell ist, gilt: $u(t) = u(t)^*$, *=konjugiert komplex):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^* \cdot u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-in\omega_0 t} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

(b) Parseval besagt, dass man die 'Gesamt-Leistung' eines Signals $\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$ im Zeit- oder Frequenzbereich bestimmen kann. Das 'Spektrum' c_k verrät also, wie die Gesamtleistung auf die verschiedenen Frequenzen verteilt ist.