

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 5. Woche – Fourier-Reihe, Fourier- und Laplace-Transformation

### Fourier-Reihe

#### A1 Gerade/ungerade Fortsetzung

Bilden Sie für folgende Funktionen die angegebene periodische Fortsetzung, skizzieren Sie diese und geben Sie **nur den Ansatz** zur Berechnung der Koeffizienten deren Fourier-Reihe an.

- (a)  $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{T})$  für  $0 < x < \frac{T}{2}$ ; gerade Fortsetzung zu  $T$ -periodischer Funktion,
- (b)  $f(x) = x(\frac{T}{2} - x)$  für  $0 < x < \frac{T}{2}$ ; ungerade Fortsetzung zu  $T$ -periodischer Funktion.

### Fourier-Transformation

#### A2 Hin- und Rück-Transformation für gerade Signale

Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das Spektrum des Signals  $f(t)$  und mit Hilfe der **inversen Fourier-Transformation** das zum Spektrum  $G(\omega)$  gehörige Zeitsignal.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reflektieren Sie den Unterschied zwischen Hin- und Rück-Transformation für gerade Funktionen.

#### A3 [Zusatz:] Differentiation im Frequenzbereich

Leiten Sie die Regel [Differentiation, Ma3, Bem. 13.7](#) der Fourier-Transformation für  $n = 1$  her, in dem Sie von einem Signal und seiner Fourier-Transformierten  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$  ausgehen und die inverse Fourier-Transformation von  $G'(\omega)$  durch partielle Integration ermitteln (analog der Herleitung der 1. Differentiationsregel in der VL).

#### A4 [Zusatz:] Anwendung Verschiebungs- und Differentiations-Regel

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad h(t) = t \cdot g(t)$$

- (a) Nutzen Sie das Spektrum des Signals  $f(t)$  aus Aufgabe **A2** und die [Verschiebungsregel, Ma3, Bem. 13.7](#), um die Fourier-Transformierte des Signals  $g(t)$  zu ermitteln.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel, s. **Zusatz1**, das Spektrum des Signals  $h(t)$ .

Hinweis: Für (b) ist es praktisch,  $\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega}$  anstatt  $2\frac{\sin\omega}{\omega}$  zu nutzen.

## Laplace-Transformation

### A5 Konvergenzgebiet, Fourier-Laplace

- (a) Schraffieren Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation der Funktionen in [Bsp. 13.10](#) in der komplexen  $s$ -Ebene.
- (b) Angenommen die Laplace-Transformierte eines Signals  $f(t)$  existiert (konvergiert) auch für  $\operatorname{Re}(s) = 0$  also für  $s = i\omega$ , was der Fourier-Transformierten des Signals entspricht. Kennzeichnen Sie in der komplexen  $s$ -Ebene die Kurve, auf der  $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(\omega)$ .

**A6 Aufg. 3.4 aus dem Übungsheft Systemtheorie** Die Laplace-Transformierte eines Signals  $x(t)$  sei durch  $X(s)$  gegeben. Man zeige die Gültigkeit folgender Regel der Laplace-Transformation:

- (a)  $\mathcal{L}(x(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(x(t))\left(\frac{s}{a}\right)$   
bzw. in Systemtheorie-Notation  $x(at) \circlearrowright \bullet \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0, \text{ Ähnlichkeitssatz}),$

Vergleichen Sie (a) mit der Skalierungseigenschaft der Fourier-Transformation, s. [Bem. 13.7](#).

### A7 'Beidseitige' Laplace-Transformation

Angenommen, es gäbe ein Laplace-Transformation  $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}$ , die auch 'negative' Zeiten nutzt:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Geben Sie diese 'beidseitige' Laplace-Transformierte folgender Signale UND deren Konvergenzgebiet in der komplexen  $s$ -Ebene an:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Reflektieren Sie die segensreiche Einschränkung auf 'positive' Zeiten in der Definition der Laplace-Transformation Ma3, Def. 13.7 in Bezug auf die eindeutige Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation.