

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 6. Woche – Funktionen komplexer Variablen

A1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Exponentialfunktion und kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet in der komplexen Ebene ;-).

Kurzlösung: QK: $\rho = \dots$

A2 Machen Sie sich klar, dass die Definitionen der komplexen Winkelfunktionen $\sin(z)$, $\cos(z)$ wie auch der komplexen hyperbolischen Funktionen $\sinh(z)$, $\cosh(z)$, s. [Bsp. 13.22](#) **abwärts kompatibel** sind, in dem Sinne, dass sie auf der reellen Achse mit den bekannten reellen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ übereinstimmen.

Kurzlösung: Für $z = x \in \mathbb{R} \dots$

A3 Alle Beziehungen in [Bsp. 13.22](#) sind aus einem minimalen Set von Gleichungen herleitbar (nur die merkt man sich), die jeweils durch ein Upgrade von reellem zu komplexem Argument aus Bekanntem hervorgehen:

$$\begin{array}{l|l} (i) & e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \rightarrow e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \\ (ii) & \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \rightarrow \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ (iii) & \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \rightarrow \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ (iv) & \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \rightarrow \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \\ (v) & \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \rightarrow \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \end{array}$$

Leiten Sie die Beziehung zwischen komplexer Sinusfunktion und reellen Winkel- und Hyperbelfunktionen mit $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

her, indem Sie obige Gleichungen und das Potenzgesetz $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ nutzen.

Kurzlösung:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{-y} \cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos(x) + i \sin(x)) \\ e^{-iz} &= \dots \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= \sin(x)(\dots) + \cos(x)(\dots) \end{aligned}$$