Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
7. Woche – Laplace-Transformation, Partialbruchzerlegung

Laplace-Transformation

A1 Ermitteln Sie die Lösung der folgenden DGL mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\dot{x}(t) + 5x(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0.$$

Gehen Sie dabei analog Bsp. 13.14 vor:

(a) Geben Sie die Laplace-Transformierte der DGL an.

(b) Lösung Sie (a) nach $X(s)$ auf.

(c) Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von (b) und

(d) Rücktransformieren Sie (c).

Kurzlösung:

(a) $sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s}$

(d) $X(t) = \frac{1}{5}\left(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t)\,\mathrm{e}^{-5t}\right)$.

A2 Überprüfen Sie den **Faltungs**satz Satz 13.15 für die in der Tabelle gegebenen Signale $f(t), g(t)$, indem Sie

i Faltung $(f * g)(t)$ berechnen,

ii die Laplace-Transformierten der drei Signale $f(t), g(t)$ und $(f * g)(t)$ ermitteln (ggf. Tabellen nutzen) und

iii überprüfen, ob das Produkt der ersten beiden Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s)$ gleich der dritten $\mathcal{L}(f * g)(s)$ ist.

	$f(t)$	$g(t)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$

Hinweise: Für (c,d) ist $g(t)$ ein beliebiges Signal mit $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s)$.
$\delta(t)$ ist der Dirac-Impuls.

Merke: Faltung im Zeitbereich $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Produkt im Bildbereich.

Kurzlösung:

	$f(t)$	$g(t)$	$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$\mathcal{L}(g)(s)$	$\mathcal{L}(f*g)(s)$	$\mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s)=\mathcal{L}(f*g)(s)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	✓
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t\,\mathbf{1}(t)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	✓
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$	$\int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$	$\frac{1}{s}$	$G(s)$	$\dots,\ (*)$	✓
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$	$g(t)$	1	$G(s)$	$G(s)$	✓

(*) Ableitungsregel 'rückwärts' = Integrationsregel.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

A3 PBZ für einfache Pole

Man zerlege $f(z)$ in Partialbrüche.

$$f(z)=\frac{(3-i)z-5}{(z+i)(z-2)}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert, den Sie erhalten, wenn Sie einen Pol von $f(z)$ streichen und in den 'Rest' die Polstelle einsetzen.

Kurzlösung:

$$f(z)=\frac{3}{z+i}-\frac{i}{z-2}.$$

Zusatz: A ist das später so gefragte **Residuum**

Die Funktion $f(z)$ soll in Partialbrüche zerlegt werden.

(a)

$$f(z)=\frac{\text{Zähler}}{(z-z_{\text{Pol}})(\text{Nenner-Rest})}=\frac{A}{(z-z_{\text{Pol}})}+\dots$$

(b)

$$f(z)=\frac{\text{Zähler}}{(z-z_{\text{Pol}})^2(\text{Nenner-Rest})}=\frac{A}{(z-z_{\text{Pol}})}+\frac{B}{(z-z_{\text{Pol}})^2}+\dots$$

Geben Sie für (a) und (b) ein Verfahren (eine allgemeine Formel) zur Berechnung von A an. Sie dürfen

- $f(z)$ mit geeigneten Termen multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

Kurzlösung:

(a) $\quad A = f(z)(z - z_{\mathrm{Pol}})\big|_{z=z_{\mathrm{Pol}}}$,

(b) $\quad A = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} f(z)(z - z_{\mathrm{Pol}})^2\right|_{z=z_{\mathrm{Pol}}}$.

A ist das später so gefragte Residuum.

Kurven in der komplexen Ebene

A4 Ortskurven

In der VL Dynamische Netzwerke lernen Sie Ortskurven kennen - das sind Kurven, die Orte in der komplexen Ebene verbinden, die von einer reellen Variablen, z.B. von $t \in \mathbb{R}$ in der Geradengleichung $z = z_0 + tz_1$ abhängen.

(a) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = z_0 + tz_1$ für zwei selbst gewählte komplexe Zahlen z_0, z_1 für $t \geq 0$.

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + \mathrm{i}\omega L$ für (konstante) reelle $R, L > 0$ mit (variablem) $\omega \geq 0$.

(c) Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + \mathrm{i}\omega L$ für (konstante) reelle $\omega, L > 0$ mit (variablem) $R \geq 0$.

Kurzlösung:

(a) 'schräge' Halbgerade von z_0 in Richtung z_1.

(b) 'senkrechte' Halbgerade.

(c) 'waagerechte' Halbgerade.