Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

9. Woche – Gebiet in $\mathbb{C}$?, $\mathrm{Im}(z)$ differenzierbar?

A1 Gebiete in $\mathbb{C}$?

Bei welchen der folgenden Teilmengen der komplexen Ebene handelt es sich um ein **Gebiet**, s. Def. 13.18?

(a) Punkt $z = 0$,
(b) abgeschlossene Einheitskugel $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$,
(c) reelle Achse $\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) = 0\}$,
(d) Vereinigung zweier 'Kugeln' $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 1 \vee |z+1| < 1\}$.

Lösung:

In keinem der Fälle (a)-(d) handelt es sich um ein Gebiet.

(a) Punkt $z = 0$, **nicht offen**
(b) abgeschlossene Einheitskugel $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$, **nicht offen**
(c) reelle Achse $\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) = 0\}$, **nicht offen**
(d) Vereinigung zweier 'Kugeln' $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 1 \vee |z+1| < 1\}$, **nicht zusammenhängend**.

Zusatz: Inversion kompl. Sinusfunktion

Vollziehen Sie die Umkehrfunktion des komplexen Sinus nach, s. VL nach 13.26.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
w = \sin(z) \Rightarrow \cos(z) &= \pm(1-w^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{wegen } \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) &= \mathrm{i}w \pm (1-w^2)^{\frac{1}{2}} \qquad |\log(.) \\
\mathrm{i}z &= \log(\mathrm{i}w \pm (1-w^2)^{\frac{1}{2}}) \dots \\
z &= -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}w \pm (1-w^2)^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

A2 $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ differenzierbar?

Wenden Sie die Definition der komplexen Differenzierbarkeit

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

an, um zu zeigen, dass die Funktion $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ nirgends differenzierbar ist.

Lösung:

Analog $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, s. Bsp. 13.35.

$\Rightarrow$ Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht (hängt von der Annäherungsrichtung h ab) $\Rightarrow$ f nirgends differenzierbar und somit sie natürlich auch nicht holomorph.