

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

### 11. Woche – Spiegelpunkte am Kreis und $\int_C f(z) dz$ (Ma3) vs. $\int_\gamma \underline{F} d\underline{s}$ (Ma2)

#### A1 Zusatz: 2circles to 2circles: zwei einfache Gleichungen für $z_0$ und $r_0$ in Bsp. 13.61

In [Ma1](#), [Übung 5](#), [A8](#) haben wir gelernt, dass alle Punkte  $z$ , deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen,  $z_1, z_2$ , in einem bestimmten Verhältnis  $\alpha$  zueinander stehen (für  $\alpha \neq 1$ ) auf einem Kreis  $K$  mit dem Radius  $R$  um Mittelpunkt  $M$  liegen, wenn  $z_1, z_2, M$  auf einer Geraden liegen und  $\|z_1 - M\| \cdot \|z_2 - M\| = R^2$  (1) und  $\alpha = R/\|z_1 - M\|$  (2).  $z_1, z_2$  sind so genannte *spiegelbildliche* Punkte zum Kreis  $K$  und nicht eindeutig.

In [Bsp. 13.61](#) geht es darum, *gemeinsame* Spiegelpunkte für den Einheitskreis ( $M_0 = 0, R_0 = 1 \rightarrow$  mit (1)  $z_1 = z_0, z_2 = 1/z_0$  (3)) UND den Kreis  $K : M = 1/2, R = 1/4$ . Die gemeinsamen Spiegelpunkte (liegen auf der Verbindungsgeraden beider Kreismittelpunkte - hier reelle Achse)  $z_{1,2} \in \mathbb{R}$  sind die Lösungen der Gleichung (1) unter Verwendung von (3) für den Kreis  $K$ :

$$(z_0 - 1/2)(1/z_0 - 1/2) = 1/16 \quad (*)$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung (\*).

Wir wählen  $z_0 = \frac{19 - \sqrt{105}}{16}$ . In [Übung 9, A4](#) haben wir bereits gezeigt, dass die Möbiustransformation

$$w = \frac{z - z_0}{z_0 z - 1}$$

den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbildet<sup>1</sup>. Somit ist nur noch zu untersuchen, dass sie den Kreis  $K$  auf einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius  $r_0$  abbildet. Dazu wird genutzt, dass für die beiden Punkte  $z_K$  des Kreises  $K$  auf der Verbindungsgeraden beider Kreismittelpunkte gilt

$$z_K - z_0 = \pm \frac{1}{\alpha} (z_K - 1/z_0) \quad \text{vergleiche} \quad \|z - z_2\| = \alpha \|z - z_1\|$$

Somit ist

$$w(z_K) = \frac{z_K - z_0}{z_0 z_K - 1} = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{z_K - 1/z_0}{z_0 z_K - 1} = \pm \underbrace{\frac{1}{\alpha z_0}}_{=r_0} \frac{z_K - 1/z_0}{z_K - 1/z_0}$$

Mit (2) gilt  $\alpha = R/\|z_1 - M\| = \frac{1/4}{z_0 - 1/2}$ .

(b) Berechnen Sie (gern mit Rechner :-))  $r_0 = \frac{1}{\alpha z_0}$ .

#### A2 $\int_C f(z) dz$ (Ma3) vs. $\int_\gamma \underline{F} d\underline{s}$ (Ma2)

Geben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede von komplexen Kurvenintegralen und Kurvenintegralen 2. Art an.

<sup>1</sup>Das ist der Grundbaustein eines sogenannten Allpasses zeitdiskreter Systeme, s. [Systemtheorie](#)