Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

11. Woche – Spiegelpunkte am Kreis und $\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ (Ma3) vs. $\int_\gamma \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s}$ (Ma2)

A1 Zusatz: 2circles to 2circles: zwei einfache Gleichungen für z_0 und r_0 in Bsp. 13.61

In Ma1, Übung 5, A8 haben wir gelernt, dass alle Punkte z, deren Abstände zu zwei gegebenen (komplexen) Zahlen, z_1, z_2, in einem bestimmten Verhältnis α zueinander stehen (für $\alpha \neq 1$) auf einem Kreis K mit dem Radius R um Mittelpunkt M liegen, wenn z_1, z_2, M auf einer Geraden liegen und $\|z_1 - M\| \cdot \|z_2 - M\| = R^2$ (1) und $\alpha = R/\|z_1 - M\|$ (2). z_1, z_2 sind so genannte *spiegelbildliche* Punkte zum Kreis K und nicht eindeutig.

In Bsp. 13.61 geht es darum, *gemeinsame* Spiegelpunkte für den Einheitskreis ($M_0 = 0, R_0 = 1 \to$ mit (1) $z_1 = z_0, z_2 = 1/z_0$ (3)) UND den Kreis $K : M = 1/2, R = 1/4$. Die gemeinsamen Spiegelpunkte (liegen auf der Verbindungsgeraden beider Kreismittelpunkte - hier reelle Achse) $z_{1,2} \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen der Gleichung (1) unter Verwendung von (3) für den Kreis K:

$$(z_0 - 1/2)(1/z_0 - 1/2) = 1/16 \qquad (*)$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung (*).

Wir wählen $z_0 = \frac{19-\sqrt{105}}{16}$. In Übung 9, A4 haben wir bereits gezeigt, dass die Möbiustransformation

$$w = \frac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}$$

den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbildet[1]. Somit ist nur noch zu untersuchen, dass sie den Kreis K auf einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius r_0 abbildet. Dazu wird genutzt, dass für die beiden Punkte z_K des Kreises K auf der Verbindungsgeraden beider Kreismittelpunkte gilt

$$z_K - z_0 = \pm\frac{1}{\alpha}(z_K - 1/z_0) \qquad \text{vergleiche} \qquad \|z - z_2\| = \alpha\|z - z_1\|$$

Somit ist

$$w(z_K) = \frac{z_K - z_0}{\overline{z_0}z_K - 1} = \pm\frac{1}{\alpha}\frac{z_K - 1/z_0}{z_0 z_K - 1} = \pm\underbrace{\frac{1}{\alpha z_0}}_{=r_0}\frac{z_K - 1/z_0}{z_K - 1/z_0}$$

Mit (2) gilt $\alpha = R/\|z_1 - M\| = \frac{1/4}{z_0 - 1/2}$.

(b) Berechnen Sie (gern mit Rechner :-)) $r_0 = \frac{1}{\alpha z_0}$.

Kurzlösung:

(a) $z_0 = \frac{19\pm\sqrt{105}}{16}$,

(b) $r_0 = \frac{13-\sqrt{105}}{8}$.

bzw. s. circles2circles.m.

[1] Das ist der Grundbaustein eines sogenannten Allpasses zeitdiskreter Systeme, s. Systemtheorie

A2 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ (Ma3) vs. $\int_\gamma \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s}$ (Ma2)

Geben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede von komplexen Kurvenintegralen und Kurvenintegralen 2. Art an.

Kurzlösung:

komplexes Kurvenintegral	Kurvenintegral 2. Art
$I = \int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z$ $C\colon z(t) \in \mathbb{C}, t \in [a,b]$ $\mathrm{d}\,z = z'(t)\,\mathrm{d}\,t$	$I = \int_\gamma \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s}$ $\gamma\colon \underline{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n, n = 2,3, t \in [a,b]$ $\mathrm{d}\,\underline{s} = \underline{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}\,t$
$I = \int_C f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{t=a}^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}\,t$ $f(z(t)), z'(t), f(z(t))z'(t), I \in \mathbb{C}$	$I = \int_\gamma \underline{F}\,\mathrm{d}\,\underline{s} = \int_{t=a}^b \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t)\rangle\,\mathrm{d}\,t$ $\underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \in \mathbb{R}^n$ aber $\langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t)\rangle, I \in \mathbb{R}$