

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung) 13. Woche – Residuum

A1 Herleitung Residuenberechnung

Betrachtet wird das Integral

$$I = \oint_C f(z) dz$$

wobei $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ und $h(z)$ eine um z_0 holomorphe Funktion ist und der Integrationsweg C z_0 einmal umläuft.

Da die Funktion $h(z)$ um z_0 holomorph ist, lässt sie sich als komplexe Potenzreihe (VL13.3) darstellen:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

- (a) Schreiben Sie die ersten 3 Summanden der Potenzreihe von $h(z)$ sowie der Laurent-Reihe von $f(z) = \sum_{k=?}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ aus.
- (b) Welcher Koeffizient ist das **Residuum** von $f(z)$?
- (c) Führen Sie mit $f(z)$ die ersten 3 Summanden ... ein paar Rechenschritte durch, bis a_{-1} erhalten. Sie dürfen sich an **Zusatz in AB5** erinnern ;-) und
 - $f(z)$ mit geeigneten Potenzen von $(z - z_0)$ multiplizieren,
 - ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten,
 - ggf. durch einen geeigneten Ausdruck teilen und
 - einen geeigneten Wert für z einsetzen.
- (d) Überlegen Sie sich, wie Sie bei $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}$ vorgehen würden?
- (e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis in der nächsten :-) Vorlesung mit **Satz 13.85**.

Kurzlösung:

$$(a) \quad h(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$f(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \frac{c_1}{(z-z_0)^2} + \frac{c_2}{(z-z_0)} + \dots$$

(b) $a_{-1} = c_2$

(c) ;-)

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^3} + \frac{c_1}{(z - z_0)^2} + \frac{c_2}{(z - z_0)} + \dots \quad | \cdot (z - z_0)^3 \quad (0.1)$$

$$f(z) \cdot (z - z_0)^3 = \dots \quad | \frac{d}{dz} \quad (0.2)$$

$$\dots = \dots \quad | \cdot \frac{1}{2!} \quad (0.3)$$

$$\dots = c_2 = a_{-1} \quad (0.4)$$