Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)

14. Woche – Residuum

A1 Herleitung Residuenberechnung

Betrachtet wird das Integral

$$I = \oint_C f(z)dz$$

wobei $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^3}$ und $h(z)$ eine um z_0 holomorphe Funktion ist und der Integrationsweg C z_0 einmal umläuft.

Da die Funktion $h(z)$ um z_0 holomorph ist, lässt sie sich als komplexe Potenzreihe (VL13_3) darstellen:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k.$$

(a) Schreiben Sie die ersten 3 Summanden der Potenzreihe von $h(z)$ sowie der Laurent-Reihe von $f(z) = \sum_{k=?}^{\infty} = a_k(z-z_0)^k$ aus.

(b) Welcher Koeffizient ist das Resiuduum von $f(z)$?

(c) Führen Sie mit $f(z) =$ die ersten 3 Summanden... ein paar Rechenschritte durch, bis $a_{-1} =$ erhalten. Sie dürfen sich an Zusatz in AB7 erinnern ;-) und

- $f(z)$ mit geeigneten Potenzen von $(z-z_0)$ multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten,
- ggf. durch einen geeigneten Ausdruck teilen und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

(d) Überlegen Sie sich, wie Sie bei $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}$ vorgehen würden?

(e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Satz 13.80.

Kurzlösung:

(a) $h(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$
$f(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \frac{c_1}{(z-z_0)^2} + \frac{c_2}{(z-z_0)} + \dots$.

(b) $a_{-1} = c_2$

(c) ;-)

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^3} + \frac{c_1}{(z-z_0)^2} + \frac{c_2}{(z-z_0)} + \dots \quad | \cdot (z-z_0)^3 \tag{0.1}$$

$$f(z) \cdot (z-z_0)^3 = \dots \quad | \frac{\mathrm{d}\,.}{\mathrm{d}\,z} \tag{0.2}$$

$$\dots = \dots \quad | \cdot \frac{1}{2!} \tag{0.3}$$

$$\dots = c_2 = a_{-1} \tag{0.4}$$