Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

inkl. Lösung

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
1. Woche – Kombinatorik

Lösung: Wichtig: Die Begriffe 'Kombination, Permutation, Variation' stiften in der Regel nur Verwirrung: ggf. weglassen und nur darauf achten, dass den Studenten die Berechnung logisch ist.

A1 Schreiben Sie sämtliche unterschiedliche Anordnungen der Zahlen 1, 1, 1, 2, 2, 2 auf. Überlegen Sie sich eine Formel zur Berechnung der Anzahl dieser Anordnungen.

Lösung: $1,1,1,2,2,2$

$1,1,2,1,2,2$	$1,1,2,2,1,2$	$1,1,2,2,2,1$			
$1,2,1,1,2,2$	$1,2,1,2,1,2$	$1,2,1,2,2,1$	$1,2,2,1,1,2$	$1,2,2,1,2,1$	$1,2,2,2,1,1$
$2,1,1,1,2,2$	$2,1,1,2,1,2$	$2,1,1,2,2,1$	$2,1,2,1,1,2$	$2,1,2,1,2,1$	$2,1,2,2,1,1$
$2,2,1,1,1,2$	$2,2,1,1,2,1$	$2,2,1,2,1,1$			
$2,2,2,1,1,1$					

Es ergeben sich $6!/(3! \cdot 3!) = 20$ Permutationen (Formel der **Permutation mit Wiederholung**).

A2 Acht Personen, die täglich (einmal) an einem Tisch zusammenkommen, wollen sich an jedem Tag in einer anderen Anordung auf die 8 verschiedenen Stühle am Tisch setzen. Wie lange brauchen Sie, um alle Möglichkeiten durchzuprobieren?

Lösung: Die Anzahl der Möglichkeiten von 8 Personen sich auf 8 Stühle zu setzen beträgt $8! = 40320$ (es handelt sich um **Permutation ohne Wiederholung**). Es gilt $40320/365 \approx 110.4657$ und damit würde mindestens 110 Jahre benötigt, um alle Varianten durchzuprobieren. Vermutlich wird aber mindestens eine der beteiligten Personen vorher gestorben sein, so dass die letzte Variante nicht durchgeführt werden kann.

A3 Wie viele Diagonalen hat ein (konvexes) n-Eck?

Lösung: Aus jeder Ecke laufen $n-3$ Diagonalen ab, da zu den angrenzenden Ecken und zur selben Ecke keine Diagonalen vorhanden sind. Werden für jede Ecke $n-3$ Diagonalen gezählt, so wird jede Diagonale zweimal einbezogen (Anfangs- und Endpunkt). Damit ergibt sich für die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck

$$\frac{(n-3)\,n}{2} = \frac{n^2 - 3\,n}{2}$$

A4 Wie viele Steine hat ein Dominospiel, bei dem die Zahlen von 0 bis 9 auftauchen?

Lösung: Es gibt 10 Steine, bei denen auf beiden Seiten dieselben Werte vorhanden sind. Für Steine mit unterschiedlichen Werten auf den zwei Seiten gibt es $(10 \cdot 9)/2$ Möglichkeiten. Der Faktor 1/2 ergibt sich, da es unwichtig ist, in welcher Art und Weise die zwei Werte angeordnet sind. Damit enthält ein Dominospiel mit den Zahlen 0 bis 9 insgesamt 55 Steine.

Dies ist eine **Kombination mit Wiederholung**: $n = 10, k = 2$, also $\binom{n+k-1}{k} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ Steine.

A5 In der Blindenschrift kann durch Anordnung von 6 Punkten auf dem Papier auf bestimmten Plätzen ein Zeichen dargestellt werden. Wenn nun bei jedem der 6 Plätze "Punkt" oder "Leerstelle" möglich ist, wie groß ist dann die Anzahl der darstellbaren Zeichen?

Lösung: Für jeden Platz gibt es zwei Möglichkeiten und damit für ein Zeichen $2^6 = 64$ Möglichkeiten. Dabei ist das Zeichen, das keine Punkte enthält (Leerzeichen), mit einbezogen.

Dies ist eine **Variation mit Wiederholung** $n = 2, k = 6$.

A6 Ein zylindrisches Ziffernschloß hat vier koaxiale Ringe mit je 6 unterschiedlichen Ziffern. Das Einstellen einer Ziffernfolge und die Probe, ob sich das Schloß öffnen läßt, dauert ca. 20 Sekunden. Wie lange muß ungünstigstenfalls probiert werden, bis sich das Schloß öffnen läßt?

Lösung: Für jeden Ring gibt es 6 Möglichkeiten und da die Ringe unabhängig voneinander eingestellt werden können hat das Ziffernschloß $6^4 = 1296$ mögliche Einstellungen. Werden zur Probe einer Einstellung 20 Sekunden benötigt, so dauert es 25920 Sekunden (dies entspricht 7 Stunden und 12 Minuten) um alle Einstellungen zu überprüfen.

Dies ist eine **Variation mit Wiederholung** $n = 6, k = 4$.

A7 Wie groß ist die Anzahl der möglichen "Treffbilder", die sich beim Wurf auf 9 (in üblicher Weise) aufgestellte Kegel ergeben? (Dabei sind zwei Treffbilder gleich, wenn in beiden Fällen genau dieselben Kegel umgefallen sind.)

Lösung: Jeder Kegel besitzt zwei Möglichkeiten (stehen bleiben oder umfallen), so dass sich bei 9 Kegeln $2^9 = 512$ mögliche "Treffbilder" ergeben.
Betrachtet man das Ereignis, dass genau m Kegel umfallen, dann handelt es sich um eine Auswahl von m Objekten aus 9 gegebenen Objekten, für die $\binom{9}{m}$ Möglichkeiten vorhanden sind. Fasst man alle Fälle für $m = 0, 1, \ldots, 9$ zusammen, so erhält man mit der Binomischen Formel

$$\sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} = 2^9$$

ebenfalls die Lösung 512.

Dies ist eine **Variation mit Wiederholung** $n = 2, k = 9$.

A8 In einer Gesellschaft von n Damen und n Herren werden Paare (aus einer Dame und einem Herren) gebildet .

(a) Wie viele Konstellationen von 4 Paaren lassen sich für $n = 4$ bilden?

(b) Wie viele Konstellationen von 4 Paaren lassen sich für $n = 10$ bilden?

Lösung:

(a) Gefragt ist nach der Anzahl von möglichen Zuordnungen von 4 Herren zu den 4 Damen. Dabei gibt es für die erste Dame 4 Möglichkeiten, für die zweite Dame 3 noch zur Verfügung stehende Herren usw. Damit ergeben sich $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.

Dies ist eine **Permutation ohne Wiederholung** mit $n = 4$, also $4! = 24$ Möglichkeiten.

(b) Sind vier Damen ausgewählt, so ergeben sich $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ Möglichkeiten aus den 10 Herren die vier Tanzpartner zuzuordnen.

Dies ist jeweils eine **Variation ohne Wiederholung** mit $n = 10, k = 4$, also $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ M"oglichkeiten.

Für die Auswahl von 4 Damen aus den 10 Damen der Gesellschaft spielt die Reihenfolge keine Rolle und damit ergeben sich $\binom{10}{4} = 210$ mögliche Auswahlen.

Dies ist eine **Kombination ohne Wiederholung** mit $n = 10, k = 4$, also $\binom{10}{4}$ M"oglichkeiten.

Insgesamt sind $V_{10}^{(4)} \cdot C_{10}^{(4)} = 5040 \cdot 210 = 1\,058\,400$ Konstellationen möglich.

A9 Eine Gruppe von 20 Personen soll in 4 Teilgruppen zu je 5 Personen eingeteilt werden (von denen je eine eine spezielle Aufgabe erledigen soll). Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Lösung: Für die erste Gruppe von 5 Personen stehen 20 Personen zur Verfügung, die ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt werden können. Im nächsten Schritt wird die zweite Gruppe von 5 Personen aus noch 15 zur Verfügung stehenden ausgewählt usw. Es ergibt sich für die Anzahl der möglichen Zuordnungen

$$\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} \quad = \quad 11\,732\,745\,024$$

Die Gruppen sollen unterschiedliche Aufgaben durchführen und damit spielt die Reihenfolge der Auswahl der Gruppen ein Rolle. Die obige Anzahl ist demnach *nicht* durch 4! zu teilen.

Zusatz: Überlegen Sie sich, für welche der Aufgaben es sich um Permutationen oder Kombinationen bzw. Variationen (mit oder ohne Wiederholung) handelt.
Lösung: Zusammenfassung:

- Permutation = Vertauschung
  (evtl. mit gleichen Elementen)
- Kombination = Auswahl k aus n (Reihenfolge egal)
  (evtl. mit Wiederholung)
- Variation = Auswahl mit Reihenfolge **nicht** egal
  #Variation = #Auswahl · #Vertauschung = #Kombination · #Permutation
  (evtl. mit Wiederholung)