Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

2. Woche – Laplace-Experimente, also Fälle zählen bzw. Flächen (geometrische Wahrscheinlichkeit)

A1 Denken Sie sich je eine Situation aus, in der die Anzahl der zu ermittelnden Fälle gleich

(a) $7!$,
(b) $7 \cdot 6 \cdot 5$,
(c) $7 \cdot 7$,
(d) $\frac{7 \cdot 6}{2}$,
(e) $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,
(f) $\binom{9}{3}$, ist.

Kurzlösung:

(d) z.B. '7 Personen: jeder stößt mit jedem an'
(f) $\binom{9}{3} = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{6} = \binom{4+6-1}{6}$ also z.B. 'drei aus neun' oder 'drei aus sieben mit Wiederholung' oder '6 Getränke aus Bier, Radler, Cola, Wasser'

A2 Nennen Sie je ein Beispiel für ein Laplace-Experiment und ein Nicht-Laplace-Experiment.

Kurzlösung: Laplace-Experiment: z.B. W(6),
Nicht-Laplace-Experiment: z.B. zufällig gewählte Person hat die Ma3-Prüfung bestanden/nicht bestanden

A3 Mit einem idealen Würfel wird 3 mal gewürfelt. Man gebe einen geeigneten Raum der Elementarereigninsse Ω an. Wie groß ist der Raum aller möglichen Ereignisse $\mathcal{A}$? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) die ersten beiden Wurfergebnisse gleich sind,
(b) alle 3 Wurfergebnisse paarweise verschieden sind,
(c) die Augensumme gleich 5 ist,
(d) mindestens eine 6 dabei ist,
(e) genau eine 6 dabei ist,
(f) die Augensumme mindestens 16 ist,
(g) erst beim 3. Wurf eine 6 fällt?

Kurzlösung: (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $\frac{1}{36}$ (d) $\frac{91}{216}$ (e) $\frac{75}{216}$ (f) $\frac{5}{108}$ (g) $\frac{25}{216}$

$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}, i = 1, 2, 3\}$, $|\Omega| = 216$, $|\mathcal{A}| = 2^{216}$.

A4 In einer Schale befinden sich 15 rote, 9 weiße und 6 grüne Kugeln. Daraus werden 6 dieser Kugeln (ohne Zurücklegen) zufällig entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind diese 6 Kugeln

(a) rot (b) weiß (c) grün?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 6 entnommenen Kugeln

(d) 3 rot, 2 weiß und 1 grün, (e) 4 weiß und 2 grün

sind?

Kurzlösung: (a) 0.0084 (b) 0.0001 (c) $1.684 \cdot 10^{-6}$ (d) 0.1655 (e) 0.0032.

A5 **Zusatz:** Beim Texas Hold'em ist der Flush eine sehr starke Hand (5 Karten von einer Farbe). Gemäß der Spielregeln bekommt jeder Spieler zwei Karten von 52 (Romme- bzw. Poker-Blatt) auf die Hand, drei Karten werden aufgedeckt (der Flop), später noch eine (der Turn) und im weiteren noch eine (der River). Dazwischen kann man bieten, was aber für die folgende Fragestellung nicht wesentlich ist. Man bildet schließlich - jeder Spieler für sich - die beste Hand aus 5 dieser 7 Karten.

Es sei der Fall betrachtet, dass man selbst zwei Herzkarten geteilt bekommen hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass genau 2 bzw. dass 3 Herzkarten in Flop aufgedeckt werden?

(b) dass, wenn genau 2 Herzkarten im Flop aufgedeckt werden, die 4. Tischkarte (Turn) eine Herzkarte ist?

(c) dass, wenn genau 2 Herzkarten im Flop aufgedeckt werden, die 5. Tischkarte (River) eine Herzkarte ist, wenn die 4. keine war?

(d) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn man berücksichtigen möchte, dass die 4 weiteren Mitspieler jeweils 2 Karten geteilt bekommen haben?

(e) Wie ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn man annimmt, dass der Stapel erst gemischt wird, dann ca. in der Mitte zufällig abgehoben wird, und aus der dann oberen Hälfte die Karten verteilt werden?

Kurzlösung:

(a) P('2H im Flop') ≈ 0.11 P('3H im Flop') ≈ 0.0084.

(b) P('Turn=H') $= \frac{9}{47} \approx 0.191$.

(c) P('River=H') $= \frac{9}{46} \approx 0.196$.

A6 Auf eine Wand war vor dem Verputzen ein Drahtgeflecht aus 3mm starkem Draht aufgebracht worden, das Rechtecke mit den Seitenlängen 15mm und 25mm (gemessen von Drahtmitte bis Drahtmitte) bildet. In die verputzte Wand wird mit einem Bohrer, der einen Durchmesser von 8mm hat, ein Loch gebohrt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Bohrer nicht auf das Drahtgeflecht trifft?

Kurzlösung: $p = 0.149$.

A7 Zwei Studenten verabreden für den Abend ein Treffen. Beide wollen unabhängig voneinander irgendwann zwischen 18 und 19 Uhr am Treffpunkt erscheinen und dort genau 15 Minuten warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einander treffen?

Kurzlösung: $p = \frac{60^2 - 45^2}{60^2}$