

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

### 4. Woche – bedingte Wahrscheinlichkeiten

**A1** Es seien  $A$  und  $B$  zufällige Ereignisse. Mit Hilfe von  $p = P(A)$ ,  $q = P(B)$  und  $r = P(A \cup B)$  ermittle man

- (a)  $P(A \cap B)$ ,                      (b)  $P(A \setminus B)$ ,                      (c)  $P(A|B)$ .

**A2** Bei der Übertragung der Zeichen "Punkt" und "Strich" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen 6% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Im Mittel sind 60% der gesendeten Zeichen Punkte.

Füllen Sie die beiden folgenden Tabellen der sogenannten Verbundwahrscheinlichkeiten  $P(B \cap A)$  und der bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(B|A)$  aus.

$P(B A)$		B:empf.=	
	$p(A)$	●	—
A:ges.=	●    0.6	0.94	...
	—    ...	...	...

$P(B \cap A)$		B:empf.=	
		●	—
A:ges.=	●	$0.6 \cdot 0.94$	$0.6 \cdot \dots$
	—	...	...

**Zusatz:** Sie kennen aus der Schule bereits die Vierfeldertafel und das sogenannte Baumdiagramm: welche Art (bedingte oder Verbund-) Wahrscheinlichkeiten haben Sie in der Vierfeldertafel, an den Baumzweigen und an den Baumenden notiert?

**A3** In allen Räumen  $I, II, III, IV$  eines Studentenklubs findet eine Diskothek statt. Eine Studentin sucht dort einen bestimmten Studenten. Sie weiß: die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Diskothek besucht, ist gleich  $p$ ; die Wahrscheinlichkeit, dass er sich **dann**<sup>1</sup> in einem bestimmten Raum aufhält, beträgt  $\frac{1}{4}$ .

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin den Studenten im Raum  $III$  trifft?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ihn im Raum  $IV$  antrifft, **wenn**<sup>2</sup> sie ihn in den Räumen  $I - III$  nicht gefunden hat?

**A4** Bei einem Klassifikator (z.B. einem medizinischen Test) werden in der Regel  $2 \times 2$  Fälle unterschieden:

	Subjekt ist 'positiv'	Subjekt ist 'negativ'
Test sagt 'positiv'	true positive (tp)	false positive (fp)
Test sagt 'negativ'	false negative (fn)	true negative (tn)

Seien  $n_{tp}, n_{fp}, n_{fn}$  und  $n_{tn}$  die Häufigkeiten der entsprechenden Fälle. Im Folgenden sind alle Wahrscheinlichkeiten durch Verwendung dieser Häufigkeiten zu schätzen.

- (a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall 'Subjekt ist positiv' an!
- (b) Geben Sie die sogenannte Sensitivität (true-positive-rate) des Tests an! Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Subjekt positiv getestet wird **unter der Bedingung, dass** es positiv ist.
- (c) Geben Sie die sogenannte Spezifität (true-negative-rate) an! Das ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass ein negatives Subjekt auch negativ getestet wird.

<sup>1</sup>'dann' = 'unter der Bedingung, dass er in die Diskothek gegangen ist'

<sup>2</sup>'wenn' = 'unter der Bedingung, dass ...'

- (d) Es gibt weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten, die (verschiedene) Falschklassifizierungen beschreiben? Geben Sie diese an! Welche addiert sich mit der Sensitivität zu 1 und welche mit der Spezifität?

Bemerkung: Die Grafik veranschaulicht, dass durch die Wahl des Schwellwertes in der Regel ein Kompromiss zwischen guter Sensitivität und guter Spezifität gefunden werden muss.

