Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
4. Woche – bedingte Wahrscheinlichkeiten

A1 Es seien A und B zufällige Ereignisse. Mit Hilfe von $p = P(A)$, $q = P(B)$ und $r = P(A \cup B)$ ermittle man

(a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A \setminus B)$, (c) $P(A|B)$.

Kurzlösung:

(a) $p + q - r$

A2 Bei der Übertragung der Zeichen "Punkt" und "Strich" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen 6% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Im Mittel sind 60% der gesendeten Zeichen Punkte.
Füllen Sie die beiden folgenden Tabellen der sogenannten Verbundwahrscheinlichkeiten $P(B \cap A)$ und der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A)$ aus.

$P(B \cap A)$		B:empf.=	
		•	—
A:ges.=	•	$0.6 \cdot 0.94$	$0.6 \cdot \ldots$
	—	$\ldots$	$\ldots$

$P(B\|A)$			B:empf.=	
	p(A)		•	—
A:ges.=	0.6	•	0.94	$\ldots$
	$\ldots$	—	$\ldots$	$\ldots$

Zusatz: Sie kennen aus der Schule bereits die Vierfeldertafel und das sogenannte Baumdiagramm: welche Art (bedingte oder Verbund-) Wahrscheinlichkeiten haben Sie in der Vierfeldertafel, an den Baumzweigen und an den Baumenden notiert?

A3 In allen Räumen I, II, III, IV eines Studentenklubs findet eine Diskothek statt. Eine Studentin sucht dort einen bestimmten Studenten. Sie weiß: die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Diskothek besucht, ist gleich p; die Wahrscheinlichkeit, dass er sich **dann**[1] in einem bestimmten Raum aufhält, beträgt $\frac{1}{4}$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin den Studenten im Raum III trifft?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ihn im Raum IV antrifft, **wenn**[2] sie ihn in den Räumen $I - III$ nicht gefunden hat?

Kurzlösung:

(a) $\frac{p}{4}$ (b) $\frac{p}{4-3p}$.

zu (b) Gesucht ist $P(R_{IV} \,|\, \overline{R_I} \cap \overline{R_{II}} \cap \overline{R_{III}})$.

[1] 'dann' = 'unter der Bedingung, dass er in die Diskothek gegangen ist'
[2] 'wenn' = 'unter der Bedingung, dass ...'

$p(B\|A)$	p(A)	B: I	II	III	IV	sonstwo
A	p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
	1-p	0	0	0	0	1

$p(B \cap A)$	B: I	II	III	IV	sonstwo	
A	$\frac{p}{4}$	...	...	...	0	
	0	0	0	0	...	

- Fälle, in denen der Student nicht in den Räumen I-III angetroffen wird.

A4 Bei einem Klassifikator (z.B. einem medizinischen Test) werden in der Regel 2×2 Fälle unterschieden:

	Subjekt ist 'positiv'	Subjekt ist 'negativ'
Test sagt 'positiv'	true positive (tp)	false positive (fp)
Test sagt 'negativ'	false negative (fn)	true negative (tn)

Seien n_{tp}, n_{fp}, n_{fn} und n_{tn} die Häufigkeiten der entsprechenden Fälle. Im Folgenden sind alle Wahrscheinlichkeiten durch Verwendung dieser Häufigkeiten zu schätzen.

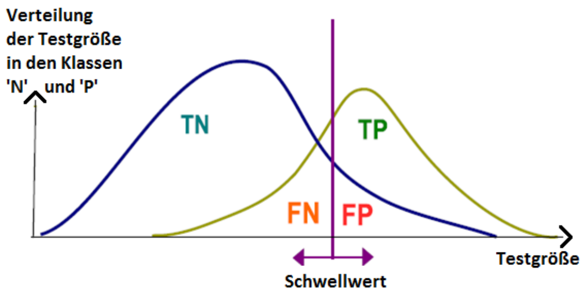
(a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall 'Subjekt ist positiv' an!

(b) Geben Sie die sogenannte Sensitivität (true-positive-rate) des Tests an! Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Subjekt positiv getestet wird **unter der Bedingung, dass** es positiv ist.

(c) Geben Sie die sogenannte Spezifität (true-negative-rate) an! Das ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass ein negatives Subjekt auch negativ getestet wird.

(d) Es gibt weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten, die (verschiedene) Falschklassifizierungen beschreiben? Geben Sie diese an! Welche addiert sich mit der Sensitivität zu 1 und welche mit der Spezifität?

Bemerkung: Die Grafik veranschaulicht, dass durch die Wahl des Testschwellwertes in der Regel ein Kompromiss zwischen guter Sensitivität und guter Spezifität gefunden werden muss.



Kurzlösung: Lösung:

(a) $p(\text{'Subjekt ist positiv'}) = \frac{n_{tp}+n_{fn}}{n_{tp}+n_{fp}+n_{fn}+n_{tn}}$

(b) Sensitivität$= p($'Test sagt positiv'$|$'Subjekt ist positiv'$) = \frac{n_{tp}}{n_{tp}+n_{fn}}$