

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

5. Woche – bedingte Wahrscheinlichkeiten

A1 Es seien A und B zufällige Ereignisse. Mit Hilfe von $p = P(A)$, $q = P(B)$ und $r = P(A \cup B)$ ermittle man

- (a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A \setminus B)$, (c) $P(A|B)$,
- (d) Seien $p = 0,5$, $q = 0,2$ und $r = 0,6$. Sind für diese konkreten Werte die Ereignisse A und B unabhängig voneinander?

A2 Sind die Ereignisse A und B in [Bsp. 14.18 a\)](#) stochastisch unabhängig?

A3 Bei der Übertragung der Zeichen "Punkt" und "Strich" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen 6% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Im Mittel sind 60% der gesendeten Zeichen Punkte.

Füllen Sie die beiden folgenden Tabellen der sogenannten Verbundwahrscheinlichkeiten $P(B \cap A)$ und der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A)$ aus.

$P(B A)$		B:empf.=	
	$p(A)$	●	—
A:ges.=	● 0.6	0.94	...
	—

$P(B \cap A)$		B:empf.=	
		●	—
A:ges.=	●	$0.6 \cdot 0.94$	$0.6 \cdot \dots$
	—

Zusatz: Sie kennen aus der Schule bereits die Vierfeldertafel und das sogenannte Baumdiagramm: welche Art (bedingte oder Verbund-) Wahrscheinlichkeiten haben Sie in der Vierfeldertafel, an den Baumzweigen und an den Baumenden notiert?

A4 In allen Räumen I, II, III, IV eines Studentenklubs findet eine Diskothek statt. Eine Studentin sucht dort einen bestimmten Studenten. Sie weiß: die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Diskothek besucht, ist gleich p ; die Wahrscheinlichkeit, dass er sich **dann**¹ in einem bestimmten Raum aufhält, beträgt $\frac{1}{4}$.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin den Studenten im Raum III trifft?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ihn im Raum IV antrifft, **wenn**² sie ihn in den Räumen $I - III$ nicht gefunden hat?

A5 Bei einem Klassifikator (z.B. einem medizinischen Test) werden in der Regel 2×2 Fälle unterschieden:

	Subjekt ist 'positiv'	Subjekt ist 'negativ'
Test sagt 'positiv'	true positive (tp)	false positive (fp)
Test sagt 'negativ'	false negative (fn)	true negative (tn)

Seien n_{tp}, n_{fp}, n_{fn} und n_{tn} die Häufigkeiten der entsprechenden Fälle. Im Folgenden sind alle Wahrscheinlichkeiten durch Verwendung dieser Häufigkeiten zu schätzen.

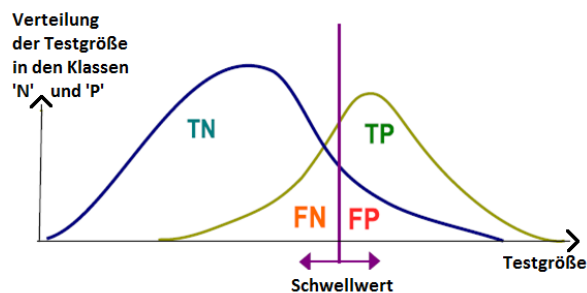
- (a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall 'Subjekt ist positiv' an!

¹'dann' = 'unter der Bedingung, dass er in die Diskothek gegangen ist'

²'wenn' = 'unter der Bedingung, dass ...'

- (b) Geben Sie die sogenannte Sensitivität (true-positive-rate) des Tests an! Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Subjekt positiv getestet wird **unter der Bedingung, dass** es positiv ist.
- (c) Geben Sie die sogenannte Spezifität (true-negative-rate) an! Das ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit**, dass ein negatives Subjekt auch negativ getestet wird.
- (d) Es gibt weitere bedingte Wahrscheinlichkeiten, die (verschiedene) Falschklassifizierungen beschreiben? Geben Sie diese an! Welche addiert sich mit der Sensitivität zu 1 und welche mit der Spezifität?

Bemerkung: Die Grafik veranschaulicht, dass durch die Wahl des Testschwellwertes in der Regel ein Kompromiss zwischen guter Sensitivität und guter Spezifität gefunden werden muss.



Zusatz: Anwendung Bayes

- A6** Bei der Übertragung der Zeichen "Punkt" und "Strich" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen 6% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Im Mittel sind 60% der gesendeten Zeichen Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- ein Punkt gesendet wurde, wenn ein Punkt empfangen wurde?
 - ein Strich gesendet wurde, wenn ein Strich empfangen wurde?
- A7** Ein Student sucht ein Buch, das mit Wahrscheinlichkeit p im Schreibtisch und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ im Bücherschrank liegt, wobei für die 10 Regale im Schrank jeweils gleiche Wahrscheinlichkeit vorliegt. Nachdem der Student in 8 Regalen nachgesehen hat, will er die Suche dort fortsetzen, wo die Wahrscheinlichkeit für das Auffinden des Buches am größten ist.
- Wo muss er suchen (in Abhängigkeit von p)?
 - Wie lautet die Antwort, wenn er bereits nach dem 6. Regal diese Entscheidung treffen will?