Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

Sommersemester 2019

5. Woche – Bayes - Probleme

A1 Bei der Übertragung der Zeichen ”‘Punkt”’ und ”‘Strich”’ in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen 6% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Im Mittel sind 60% der gesendeten Zeichen Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) ein Punkt gesendet wurde, wenn ein Punkt empfangen wurde?

(b) ein Strich gesendet wurde, wenn ein Strich empfangen wurde?

Kurzlösung:

$p(B \cap A)$		B=empf.	
		•	—
A=ges.	•		
	—		

- Fälle, in denen ein Punkt empfangen wurde.

P(Punkt gesendet | Punkt empfangen)= 0.9724

A2 Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30%, von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% Ausschuss.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig der Gesamtproduktion entnommenes Teil Ausschuss?

(b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gefundenes Ausschussteil von der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Maschine hergestellt wurde.

Kurzlösung: (a) 0.032 (b) 0.3125 bzw. 0.3750 bzw. 0.3125.

A3 Man würfelt mit zwei Würfeln und bekommt die Information, dass **mindestens** eine 2 dabei ist.

(a) Jetzt greift man zufällig einen der beiden Würfel und stellt fest, dass darauf eine 2 zu sehen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf dem anderen Würfel
i) eine 2, ii) eine 4 steht?

(b) Jemand nimmt den bzw. einen der beiden Würfel weg, auf dem eine 2 zu sehen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf dem anderen Würfel
i) eine 2, ii) eine 4 steht?

Kurzlösung: Analog A3 in Ü4 vorgehen.

(a) $w1, w2$ - Augenzahl Würfel 1/Würfel 2, $B1$ - Ereignis: Würfel 1 wird herausgegriffen. $B2$ - ...

relevante Elemetarereignisse A=(w1,w2)	p(A)	$p(B1\|A)$	$p(B2\|A)$
(2,1)	1/11	1/2	1/2
(2,3)	1/11	1/2	1/2
(2,4)	1/11	1/2	1/2
(2,5)	1/11	1/2	1/2
(2,6)	1/11	1/2	1/2
(2,2)	1/11	1/2	1/2
(1,2)	1/11	1/2	1/2
(3,2)	1/11	1/2	1/2
(4,2)	1/11	1/2	1/2
(5,2)	1/11	1/2	1/2
(6,2)	1/11	1/2	1/2

A=(w1,w2)	p(A)	$p(B1 \cap A)$	$p(B2 \cap A)$
...			

- Fälle, in denen der zufällig herausgegriffene Würfel eine 2 zeigt.

i) $p(w2 = 2|\boxed{\text{w1=2}}) = \frac{1/22}{6/22} = \frac{1}{6}$

(b) a la Monty Hall s. VL

relevante Elemetarereignisse A=(w1,w2)	p(A)	$p(B1\|A)$	$p(B2\|A)$
(2,1)	1/11	1	0
...			
(6,2)	1/11	0	1

i) $p(w2 = 2|\boxed{\text{w1=2}}) = \frac{1/22}{11/22} = \frac{1}{11}$

A4 Es seien A und B zufällige Ereignisse. Mit Hilfe von $p = P(A)$, $q = P(B)$ und $r = P(A \cup B)$ ermittle man

(a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A \setminus B)$, (c) $P(A|B)$,

(d) Seien $p = 0,5$, $q = 0,2$ und $r = 0,6$. Sind für diese konkreten Werte die Ereignisse A und B unabhängig voneinander ?

Kurzlösung:

(a) $p + q - r$ (b) $r - q$ (c) $\frac{p+q-r}{q}$

(d) Es gilt $0.1 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$ und damit sind A und B voneinander unabhängig.

A5 Sind die Ereignisse A und B in Bsp. 13.16 a) stochastisch unabhängig?

A6 Denken Sie sich eine Aufgabe aus, die mit der Bayes-Formel gelöst wird.