

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 6. Woche – Zufallsgrößen

Diskrete Zufallsgrößen

- A1** Zwei Schützen geben unabhängig voneinander jeweils auf ein eigenes Ziel einen Schuß ab. Die Trefferwahrscheinlichkeit des ersten Schützen sei p_1 , die des zweiten p_2 . Es sei X_1 die Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, falls der erste Schütze getroffen hat und den Wert 0, falls er nicht traf. Analog sei die Zufallsgröße X_2 für den zweiten Schützen definiert. Geben Sie für die Zufallsgröße $Z = X_1 - X_2$ in einer Tabelle zu allen Werten, die Z annehmen kann, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.
- A2** Bei einem zufälligen Versuch, als dessen Ergebnis stets genau eines der zufälligen Ereignisse A_1, \dots, A_5 eintritt, wird durch "X = i, falls A_i eintritt" ($i = 1, \dots, 5$) eine Zufallsgröße definiert.
- Mit Hilfe der Werte $p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3)$ und $p_5 = P(A_5)$ bestimme man die Verteilungsfunktion F_X von X .
 - Für $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{12}, p_3 = p_5 = \frac{1}{6}$ stelle man F_X graphisch dar.
- A3** Betrachtet wird ein Fahrstuhl, der die Etagen 0-6 befährt. Im Erdgeschoß (0. Etage) steigen drei Personen in den Fahrstuhl ein. Jede dieser Personen verlässt den Aufzug unabhängig von den anderen Personen ab der ersten Etage mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf jeder Etage. Der Fahrstuhl bleibt stehen, wenn der letzte Fahrgast ausgestiegen ist. Sei X die Zufallsgröße, die angibt, auf welcher Etage oder Fahrstuhl stehen bleibt.
- Man bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ dieser Zufallsgröße.
 - Man bestimme nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_X(x)$ dieser Zufallsgröße.
- A4** Es werden wiederholt, unter konstanten Bedingungen und (total) unabhängig voneinander, Schüsse auf ein Ziel abgegeben, wobei die Treffwahrscheinlichkeit $p = 0.8$ betrage. Das Schießen werde so oft durchgeführt, bis der erste Treffer erzielt wird, jedoch höchstens bis zum 4. Schuss.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?
 - Man bestimme die Verteilungsfunktion F_X der Anzahl X der abgegebenen Schüsse.
 - Man berechne $\mu = E(X)$ und $\text{var}(X) = E((X - \mu)^2)$.

Stetige Zufallsgrößen

- A5** Es sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X mit $F_X(x) = a + b \arctan x$ ($-\infty < x < \infty$).
- Welche Werte können die Konstanten a und b annehmen?
 - Wie lautet die Dichtefunktion von X ?

A6 Betrachtet wird die Exponentialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

und Erwartungswert $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, s. z.B. [Bsp. 14.32 b](#). Berechnen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes, [Bem. 14.39](#), die Varianz der Exponentialverteilung.

Falls noch Zeit übrig: Unabhängigkeit, Unkorreliertheit

A7 Zeigen Sie, dass für voneinander unabhängige Ereignisse A und B auch A und \overline{B} , \overline{A} und B bzw. \overline{A} und \overline{B} Paare unabhängiger Ereignisse sind.

A8 (a) Visualisieren Sie die Aussage am Ende von [Def. 14.36](#) sowohl in der Form "... \Rightarrow ..."
als auch in Form eines Venn-Diagramms.

(b) Gelegentlich findet man die Formulierung "Nur wenn zwei Zufallsgrößen unabhängig sind, ist der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte."
Ist diese Formulierung richtig?