Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378) Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
6. Woche – Zufallsgrößen

A1 Bei einem zufälligen Versuch, als dessen Ergebnis stets genau eines der zufälligen Ereignisse $A_1, \ldots, A_5$ eintritt, wird durch "$X = i$, falls A_i eintritt" $(i = 1, \ldots, 5)$ eine Zufallsgröße definiert.

(a) Mit Hilfe der Werte $p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3)$ und $p_5 = P(A_5)$ bestimme man die Verteilungsfunktion F_X von X.

(b) Für $p_1 = \frac{1}{3},\ p_2 = \frac{1}{12},\ p_3 = p_5 = \frac{1}{6}$ stelle man F_X graphisch dar.

Kurzlösung:

$$\text{(b)}\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{3} & & 1 \le x < 2 \\ \frac{5}{12} & \text{für} & 2 \le x < 3 \\ \frac{7}{12} & & 3 \le x < 4 \\ \frac{5}{6} & & 4 \le x < 5 \\ 1 & & 5 \le x < \infty \end{cases}$$

A2 Betrachtet wird ein Fahrstuhl, der die Etagen 0-6 befährt. Im Erdgeschoß (0. Etage) steigen drei Personen in den Fahrstuhl ein. Jede dieser Personen verlässt den Aufzug unabhängig von den anderen Personen ab der ersten Etage mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf jeder Etage. Der Fahrstuhl bleibt stehen, wenn der letzte Fahrgast ausgestiegen ist. Sei X die Zufallsgröße, die angibt, auf welcher Etage oder Fahrstuhl stehen bleibt.

(a) Man bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ dieser Zufallsgröße.

(b) Man bestimme nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_X(x)$ dieser Zufallsgröße.

Kurzlösung:

$$a) F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & \ldots \\ 1/6^3, & 1 \le x < 2 \\ 2^3/6^3, & 2 \le x < 3 \\ \ldots \end{cases} \qquad b) f_X(x) = \begin{cases} 1/6^3, & x = 1 \\ (2^3-1)/6^3, & x = 2 \\ \ldots \end{cases}$$

A3 Zwei Schützen geben unabhängig voneinander jeweils auf ein eigenes Ziel einen Schuß ab. Die Trefferwahrscheinlichkeit des ersten Schützen sei p_1, die des zweiten p_2. Es sei X_1 die Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, falls der erste Schütze getroffen hat und den Wert 0, falls er nicht traf. Analog sei die Zufallsgröße X_2 für den zweiten Schützen definiert. Geben Sie für die Zufallsgröße $Z = X_1 - X_2$ in einer Tabelle zu allen Werten, die Z annehmen kann, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

Kurzlösung:

Ereignis	Wert von Z	Wahrscheinlichkeit $P(Z)$
Schütze2 besser	-1	$(1-p_1)p_2$
Schützen gleich gut	0	$1-p_1-p_2+2p_1p_2$
Schütze1 besser	1	$p_1(1-p_2)$

A4 Es werden wiederholt, unter konstanten Bedingungen und (total) unabhängig voneinander, Schüsse auf ein Ziel abgegeben, wobei die Treffwahrscheinlichkeit $p = 0.8$ betrage. Das Schießen werde so oft durchgeführt, bis der erste Treffer erzielt wird, jedoch höchstens bis zum 4. Schuss.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

(b) Man bestimme die Verteilungsfunktion F_X der Anzahl X der abgegebenen Schüsse.

(c) Man berechne $\mu = E(X)$ und $\mathrm{var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$.

Kurzlösung:

(a) 0.9984

(b) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & & -\infty < x \leq 1 \\ 0.80 & & 1 \leq x < 2 \\ 0.96 & \text{für} & 2 \leq x < 3 \\ 0.992 & & 3 \leq x < 4 \\ 1 & & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

(c) $E(X) = 1.248$, $\mathrm{var}(X) = 0.2985$.

A5 Es sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X mit $F_X(x) = a + b \arctan x$ $(-\infty < x < \infty)$.

(a) Welche Werte können die Konstanten a und b annehmen?

(b) Wie lautet die Dichtefunktion von X?

Kurzlösung: (a) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$ (b) $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

A6 Die Lebensdauer T eines elektronischen Bauelements sei exponentialverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

(a) Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauelement mindestens bis $t = \lambda^{-1}$, $t = 2\lambda^{-1}$ bzw. $t = 3\lambda^{-1}$ funktionstüchtig ist.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauelement mindestens bis $t = k\lambda^{-1}$ ($k = 1, 2, \dots$) funktionstüchtig ist, wenn dies bis zum Zeitpunkt $t = (k-1)\lambda^{-1}$ der Fall war?

Kurzlösung: (a) 0.3679, 01353 bzw. 0.0498 (b) $\frac{1}{e} = 0.3679$ (für alle k).

Falls noch Zeit übrig

A7 Zeigen Sie, dass für voneinander unabhängige Ereignisse A und B auch A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ Paare unabhängiger Ereignisse sind.

Kurzlösung: Zu zeigen: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B))$.