

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

6. Woche – Wiederholung(Bayes) + Zufallsgrößen

Wiederholung(Bayes)

A1 Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30%, von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% Ausschuss.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig der Gesamtproduktion entnommenes Teil Ausschuss?
- (b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gefundenes Ausschussteil von der ersten bzw. zweiten bzw. dritten Maschine hergestellt wurde.

Kurzlösung: (a) 0.032 (b) 0.3125 bzw. 0.3750 bzw. 0.3125.

A2 Zusatz: Man würfelt mit zwei Würfeln und bekommt die Information, dass **mindestens** eine 2 dabei ist.

- (a) Jetzt greift man zufällig einen der beiden Würfel und stellt fest, dass darauf eine 2 zu sehen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf dem anderen Würfel
 - i) eine 2, ii) eine 4 steht?
- (b) Jemand nimmt den bzw. einen der beiden Würfel weg, auf dem eine 2 zu sehen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf dem anderen Würfel
 - i) eine 2, ii) eine 4 steht?

Kurzlösung: Analog A4 in Ü5 vorgehen.

- (a) w_1, w_2 - Augenzahl Würfel 1/Würfel 2, B_1 - Ereignis: Würfel 1 wird herausgegriffen. B_2 - ...

relevante Elemetarereignisse $A=(w_1, w_2)$	$p(A)$	$p(B_1 A)$	$p(B_2 A)$
(2,1)	1/11	1/2	1/2
(2,3)	1/11	1/2	1/2
(2,4)	1/11	1/2	1/2
(2,5)	1/11	1/2	1/2
(2,6)	1/11	1/2	1/2
(2,2)	1/11	1/2	1/2
(1,2)	1/11	1/2	1/2
(3,2)	1/11	1/2	1/2
(4,2)	1/11	1/2	1/2
(5,2)	1/11	1/2	1/2
(6,2)	1/11	1/2	1/2
$A=(w_1, w_2)$	$p(A)$	$p(B_1 \cap A)$	$p(B_2 \cap A)$
...			

- Fälle, in denen der zufällig herausgegriffene Würfel eine 2 zeigt.

i) $p(w_2 = 2 | \boxed{w_1=2}) = \frac{1/22}{6/22} = \frac{1}{6}$

(b) a la Monty Hall s. VL

relevante Elementarereignisse $A=(w_1, w_2)$	$p(A)$	$p(B_1 A)$	$p(B_2 A)$
(2,1)	1/11	1	0
...			
(6,2)	1/11	0	1

i) $p(w_2 = 2 | \boxed{w_1=2}) = \frac{1/22}{11/22} = \frac{1}{11}$

A3 Denken Sie sich eine Aufgabe aus, die mit der Bayes-Formel gelöst wird.

Diskrete Zufallsgrößen

A4 Zwei Schützen geben unabhängig voneinander jeweils auf ein eigenes Ziel einen Schuß ab. Die Trefferwahrscheinlichkeit des ersten Schützen sei p_1 , die des zweiten p_2 . Es sei X_1 die Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, falls der erste Schütze getroffen hat und den Wert 0, falls er nicht traf. Analog sei die Zufallsgröße X_2 für den zweiten Schützen definiert. Geben Sie für die Zufallsgröße $Z = X_1 - X_2$ in einer Tabelle zu allen Werten, die Z annehmen kann, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und den Erwartungswert $E(Z)$ an.

Kurzlösung:

Ereignis	Wert von Z	Wahrscheinlichkeit $P(Z)$
Schütze2 besser	-1	$(1 - p_1)p_2$
Schützen gleich gut	0	$1 - p_1 - p_2 + 2p_1p_2$
Schütze1 besser	1	$p_1(1 - p_2)$

$E(Z) = p_1 - p_2$.

A5 Bei einem zufälligen Versuch, als dessen Ergebnis stets genau eines der zufälligen Ereignisse $A_1, \dots, A_5$ eintritt, wird durch " $X = i$, falls A_i eintritt" ($i = 1, \dots, 5$) eine Zufallsgröße definiert.

(a) Mit Hilfe der Werte $p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3)$ und $p_5 = P(A_5)$ bestimme man die Verteilungsfunktion F_X von X .

(b) Für $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{12}, p_3 = p_5 = \frac{1}{6}$ stelle man F_X graphisch dar.

Kurzlösung:

$$(b) F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{12} & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{12} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{5}{6} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x < \infty \end{cases}$$

A6 Betrachtet wird ein Fahrstuhl, der die Etagen 0-6 befährt. Im Erdgeschoß (0. Etage) steigen drei Personen in den Fahrstuhl ein. Jede dieser Personen verlässt den Aufzug unabhängig von den anderen Personen ab der ersten Etage mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf jeder Etage. Der Fahrstuhl bleibt stehen, wenn der letzte Fahrgast ausgestiegen ist. Sei X die Zufallsgröße, die angibt, auf welcher Etage der Fahrstuhl stehen bleibt.

(a) Man bestimme die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ dieser Zufallsgröße.

(b) Man bestimme nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_X(x)$ dieser Zufallsgröße.

Kurzlösung:

$$a) F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \dots \\ 1/6^3, & 1 \leq x < 2 \\ 2^3/6^3, & 2 \leq x < 3 \\ \dots & \end{cases} \quad b) f_X(x) = \begin{cases} 1/6^3, & x = 1 \\ (2^3 - 1)/6^3, & x = 2 \\ \dots & \end{cases}$$

Stetige Zufallsgröße

A7 Es sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X mit $F_X(x) = a + b \arctan x$ ($-\infty < x < \infty$).

(a) Welche Werte können die Konstanten a und b annehmen?

(b) Wie lautet die Dichtefunktion von X ?

(c) Geben Sie den Erwartungswert $E(X)$ an.

Kurzlösung: (a) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi}$ (b) $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ ($-\infty < x < \infty$) (c) $E(X) = 0$.

Unabhängigkeit

A8 Zusatz: Zeigen Sie, dass für voneinander unabhängige Ereignisse A und B auch A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ Paare unabhängiger Ereignisse sind.

Kurzlösung: Zu zeigen: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B))$.

Somit braucht man in einer Vier-Feldertafel den Unabhängigkeitstest nur einmal auszuführen.