Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2

7. Woche – Zusammenhang $f_X(x), F_X(x)$, E(X), var(X), Unabhängigkeit

Wiederholung(Diskrete Zufallsgröße)

A1 Es werden wiederholt, unter konstanten Bedingungen und (total) unabhängig voneinander, Schüsse auf ein Ziel abgegeben, wobei die Treffwahrscheinlichkeit $p = 0.8$ betrage. Das Schießen werde so oft durchgeführt, bis der erste Treffer erzielt wird, jedoch höchstens bis zum 4. Schuss.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

(b) Man bestimme die Verteilungsfunktion F_X der Anzahl X der abgegebenen Schüsse.

(c) Man berechne $\mu = E(X)$ und $\operatorname{var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$.

Zusammenhang Dichte- und Verteilungsfunktion, E(X), var(X)

A2 Man weise nach, dass die Funktionen f mit

(a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x \leq -1 \\ 0 & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

die Eigenschaften einer Dichtefunktion haben und ermittle die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

A3 **Zusatz:** Betrachtet wird die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \varepsilon \cdot x^{-(1+\varepsilon)} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } \varepsilon > 0.$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktionen $f_X(x)$ die Eigenschaft einer Dichtefunktion hat, also $\int_{-\infty}^{\infty} f \,\mathrm{d}\, x = 1$.

(b) Für welche Werte ε existiert der Erwartungswert der Zufallsgröße $E(X)$?

(c) Für welche Werte ε existiert der Erwartungswert des Quadrats der Zufallsgröße $E(X^2)$?

A4 Gegeben seien Zufallsgrößen X, Y mit den Verteilungsfunktionen:

α) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < -1 \\ 0.2 & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0.7 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.8 & \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

β) $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < x < \infty. \end{cases}$$

(a) Welche der Zufallsgrößen besitzt eine diskrete bzw. stetige Verteilung?

(b) Stellen Sie die Verteilungsfunktionen $F_X(x), F_Y(x)$ graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Man ermittle außerdem:

(d) $P(X=0)$, $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$, $P(X > 1.5)$,

(e) $E(X)$, $E(Y)$,

(f) $P\left(-\frac{1}{2} < Y \leq \frac{1}{2}\right)$, $P(Y \geq 2)$.

Exponentialverteilung

A5 Betrachtet wird die Exponentialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

und Erwartungswert $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, s. z.B. Bsp. 14.32 b. Berechnen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes, Bem. 14.39, die Varianz der Exponentialverteilung.

A6 Die Lebensdauer T eines elektronischen Bauelements sei exponentialverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

(a) Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauelement mindestens bis $t = \lambda^{-1}$, $t = 2\lambda^{-1}$ bzw. $t = 3\lambda^{-1}$ funktionstüchtig ist.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauelement mindestens bis $t = k\lambda^{-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$ funktionstüchtig ist, wenn dies bis zum Zeitpunkt $t = (k-1)\lambda^{-1}$ der Fall war?

Unabhängigkeit, Unkorreliertheit

A7 Die Zufallsgrößen X und Y nehmen die Werte 1, 2 und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(X=1) = 0.5$, $P(X=2) = 0.3$,
$P(Y=1) = 0.7$, $P(Y=2) = 0.2$,
$P(X=1, Y=1) = 0.35$, $P(X=2, Y=2) = 0.06$, $P(X=3, Y=1) = 0.2$.

(a) Man stelle die Verteilungstabelle von (X, Y) auf.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Man bestimme $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$.

(d) Wie lauten die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen $Z_1 = X + 3Y$ und $Z_2 = X^2 - Y$?

A8 **Zusatz:**

(a) Visualisieren Sie die Aussage am Ende von Def. 14.36 sowohl in der Form "$\dots \Rightarrow \dots$" als auch in Form eines Venn-Diagramms.

(b) Gelegentlich findet man die Formulierung "**Nur** wenn zwei Zufallsgrößen unabhängig sind, ist der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte." Ist diese Formulierung richtig?