Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)
Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

7. Woche – Zusammenhang $f_X(x)F_X(x)$, E(X), var(X), Unabhängigkeit, Binomial-Verteilung

Zusammenhang Dichte- und Verteilungsfunktion, E(X), var(X)

A1 Man weise nach, dass die Funktionen f mit

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x \leq -1 \\ 0 & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

die Eigenschaften einer Dichtefunktion haben und ermittle die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

Kurzlösung:

(a) $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{für} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & & 1 < x < \infty \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & x > 1 \end{cases}$

A2 Gegeben seien Zufallsgrößen X, Y mit den Verteilungsfunktionen:

α) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x \leq -1 \\ 0.2 & \text{für} \quad -1 < x \leq 0 \\ 0.7 & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0.8 & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{cases}$ β) $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < x < \infty. \end{cases}$

(a) Welche der Zufallsgrößen besitzt eine diskrete bzw. stetige Verteilung?

(b) Stellen Sie die Verteilungsfunktionen $F_X(x), F_Y(x)$ graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Man ermittle außerdem:

(d) $P(X = 0)$, $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$, $P(X > 1.5)$,

(e) $E(X)$, $E(Y)$,

(f) $P\left(-\frac{1}{2} < Y \leq \frac{1}{2}\right)$, $P(Y \geq 2)$.

Kurzlösung:

(a) α) diskret, β) stetig,

(c) $\begin{array}{ll} P(X=-1) & = 0.2 \\ P(X=0) & = 0.5 \\ P(X=1) & = 0.1 \\ P(X=2) & = 0.2 \end{array}$ $\quad f_Y(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & & -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{für} & -1 < x < 1 \\ 0 & & 1 < x < \infty \end{array} \right.$.

(d) 0.5, 0.3, 0.2 (e) 0.3 (f) 0 (g) 0.5, 0.

A3 Betrachtet wird die Exponentialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T:

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{array} \right. \quad (\lambda > 0)$$

und Erwartungswert $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, s. z.B. Bsp. 13.32 b. Berechnen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes, Bem. 13.39, die Varianz der Exponentialverteilung.

Kurzlösung: $\text{var}(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

A4 Die Brenndauer X einer Glühlampe sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit einer Varianz von 10^4 h^2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Brenndauer um mehr als 50 h vom Erwartungswert abweicht?

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von A3.

Kurzlösung: $p = 0.6166$

Unabhängige Zufallsgrößen

A5 Die Zufallsgrößen X und Y nehmen die Werte 1, 2 und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(X=1) = 0.5$, $P(X=2) = 0.3$,
$P(Y=1) = 0.7$, $P(Y=2) = 0.2$,
$P(X=1, Y=1) = 0.35$, $P(X=2, Y=2) = 0.06$, $P(X=3, Y=1) = 0.2$.

(a) Man stelle die Verteilungstabelle von (X, Y) auf.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Man bestimme $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$.

(d) Wie lauten die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen $Z_1 = X + 3Y$ und $Z_2 = X^2 - Y$?

Kurzlösung:

(a)

X \ Y	1	2	3	$\sum$
1	0.35	0.14	0.01	0.5
2	0.15	0.06	0.09	0.3
3	0.20	0.00	0.00	0.2
$\sum$	0.7	0.2	0.1	1

(b) Nein

(c) $E(X) = 1.7$, $E(Y) = 1.4$, $\text{var}(X) = 0.61$, $\text{var}(Y) = 0.44$.

(d)
$$\begin{array}{lll}
P(Z_1 = 4) = 0.35, & P(Z_1 = 7) = 0.14, & P(Z_1 = 10) = 0.01. \\
P(Z_1 = 5) = 0.15, & P(Z_1 = 8) = 0.06, & P(Z_1 = 11) = 0.09. \\
P(Z_1 = 6) = 0.20, & P(Z_1 = 9) = 0.00, & P(Z_1 = 12) = 0.00. \\
P(Z_2 = -2) = 0.01, & P(Z_2 = 1) = 0.09, & P(Z_2 = 6) = 0.00. \\
P(Z_2 = -1) = 0.14, & P(Z_2 = 2) = 0.06, & P(Z_2 = 7) = 0.00. \\
P(Z_2 = 0) = 0.35, & P(Z_2 = 3) = 0.15, & P(Z_2 = 8) = 0.20.
\end{array}$$

Binomialverteilung

A6 Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Bedienung eines Webstuhles innerhalb von 10 Minuten ein Spulenwechsel vorzunehmen ist, betrage $p = \frac{1}{3}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Bedienung von zwölf unabhängig voneinander arbeitenden Webstühlen innerhalb von 10 Minuten bei

(a) genau vier Maschinen,

(b) allen Maschinen,

(c) keiner Maschine,

(d) höchstens drei Maschinen,

(e) mehr als zwei Maschinen

ein Spulenwechsel erforderlich ist?

Kurzlösung: (a) 0.2384 (b) 0.3931 (c) 0.000002 (d) 0.0077 (e) 0.8189.