Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
7. Woche – Zusammenhang $f_X(x), F_X(x)$, E(X), var(X), Unabhängigkeit

Wiederholung(Diskrete Zufallsgröße)

A1 Es werden wiederholt, unter konstanten Bedingungen und (total) unabhängig voneinander, Schüsse auf ein Ziel abgegeben, wobei die Treffwahrscheinlichkeit $p = 0.8$ betrage. Das Schießen werde so oft durchgeführt, bis der erste Treffer erzielt wird, jedoch höchstens bis zum 4. Schuss.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

(b) Man bestimme die Verteilungsfunktion F_X der Anzahl X der abgegebenen Schüsse.

(c) Man berechne $\mu = E(X)$ und $\text{var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$.

Kurzlösung:

(a) 0.9984

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 1 \\ 0.80 & 1 \leq x < 2 \\ 0.96 \quad \text{für} & 2 \leq x < 3 \\ 0.992 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < \infty \end{cases}$

(c) $E(X) = 1.248$, $\text{var}(X) = 0.2985$.

Zusammenhang Dichte- und Verteilungsfunktion, E(X), var(X)

A2 Man weise nach, dass die Funktionen f mit

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x \leq -1 \\ 0 & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{3}{x^4} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

die Eigenschaften einer Dichtefunktion haben und ermittle die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

Kurzlösung:

(a) $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} \quad \text{für} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & 1 < x < \infty \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & x > 1 \end{cases}$

A3 **Zusatz:** Betrachtet wird die Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \varepsilon \cdot x^{-(1+\varepsilon)} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } \varepsilon > 0.$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktionen $f_X(x)$ die Eigenschaft einer Dichtefunktion hat, also $\int_{-\infty}^{\infty} f \, \mathrm{d}\, x = 1$.

(b) Für welche Werte ε existiert der Erwartungswert der Zufallsgröße $E(X)$?

(c) Für welche Werte ε existiert der Erwartungswert des Quadrats der Zufallsgröße $E(X^2)$?

Kurzlösung:

(a) ✓, (b) $E(X) = \varepsilon/(\varepsilon - 1)$, falls $\varepsilon > 1$, (c) $E(X^2) = \varepsilon/(\varepsilon - 2)$, falls $\varepsilon > 2$.

A4 Gegeben seien Zufallsgrößen X, Y mit den Verteilungsfunktionen:

$$\alpha) \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & -\infty < x < -1 \\ 0.2 & \text{für} & -1 \leq x < 0 \\ 0.7 & \text{für} & 0 \leq x < 1 \\ 0.8 & \text{für} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für} & 2 \leq x < \infty \end{cases} \qquad \beta) \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{für} & -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für} & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

(a) Welche der Zufallsgrößen besitzt eine diskrete bzw. stetige Verteilung?

(b) Stellen Sie die Verteilungsfunktionen $F_X(x), F_Y(x)$ graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Man ermittle außerdem:

(d) $P(X = 0)$, $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right)$, $P(X > 1.5)$,

(e) $E(X)$, $E(Y)$,

(f) $P\left(-\frac{1}{2} < Y \leq \frac{1}{2}\right)$, $P(Y \geq 2)$.

Kurzlösung:

(a) α) diskret, β) stetig,

(c)
$$\begin{aligned} P(X = -1) &= 0.2 \\ P(X = 0) &= 0.5 \\ P(X = 1) &= 0.1 \\ P(X = 2) &= 0.2 \end{aligned} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & & -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{für} & -1 < x < 1 \\ 0 & & 1 < x < \infty \end{cases} .$$

(d) 0.5, 0.3, 0.2 (e) 0.3, 0 (f) 0.5, 0.

Exponentialverteilung

A5 Betrachtet wird die Exponentialverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_T:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

und Erwartungswert $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, s. z.B. Bsp. 14.32 b. Berechnen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes, Bem. 14.39, die Varianz der Exponentialverteilung.

Kurzlösung: $\operatorname{var}(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Unabhängigkeit, Unkorreliertheit

A6 Die Zufallsgrößen X und Y nehmen die Werte 1, 2 und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.3$,
$P(Y = 1) = 0.7$, $P(Y = 2) = 0.2$,
$P(X = 1, Y = 1) = 0.35$, $P(X = 2, Y = 2) = 0.06$, $P(X = 3, Y = 1) = 0.2$.

(a) Man stelle die Verteilungstabelle von (X, Y) auf.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Man bestimme $E(X)$, $E(Y)$, $\operatorname{var}(X)$, $\operatorname{var}(Y)$.

(d) Wie lauten die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgrößen $Z_1 = X + 3Y$ und $Z_2 = X^2 - Y$?

Kurzlösung:

(a)

X \ Y	1	2	3	$\sum$
1	0.35	0.14	0.01	0.5
2	0.15	0.06	0.09	0.3
3	0.20	0.00	0.00	0.2
$\sum$	0.7	0.2	0.1	1

(b) Nein

(c) $E(X) = 1.7$, $E(Y) = 1.4$, $\operatorname{var}(X) = 0.61$, $\operatorname{var}(Y) = 0.44$.

(d)
$$\begin{array}{lll}
P(Z_1 = 4) = 0.35, & P(Z_1 = 7) = 0.14, & P(Z_1 = 10) = 0.01. \\
P(Z_1 = 5) = 0.15, & P(Z_1 = 8) = 0.06, & P(Z_1 = 11) = 0.09. \\
P(Z_1 = 6) = 0.20, & P(Z_1 = 9) = 0.00, & P(Z_1 = 12) = 0.00. \\
P(Z_2 = -2) = 0.01, & P(Z_2 = 1) = 0.09, & P(Z_2 = 6) = 0.00. \\
P(Z_2 = -1) = 0.14, & P(Z_2 = 2) = 0.06, & P(Z_2 = 7) = 0.00. \\
P(Z_2 = 0) = 0.35, & P(Z_2 = 3) = 0.15, & P(Z_2 = 8) = 0.20.
\end{array}$$

A7 Zusatz:

(a) Visualisieren Sie die Aussage am Ende von Def. 14.36 sowohl in der Form "$\ldots \Rightarrow \ldots$" als auch in Form eines Venn-Diagramms.

(b) Gelegentlich findet man die Formulierung "**Nur** wenn zwei Zufallsgrößen unabhängig sind, ist der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte." Ist diese Formulierung richtig?

Kurzlösung:

(a) Unabhängigkeit $\Rightarrow$ Unkorreliertheit; Venn-Diagramm: unabhängige ZG $\subset$ unkorrelierte ZG

(b) Nein! Wie z.B. in Folie 14_5 diskutiert, können auch abhängige Zufallsgrößen unkorreliert sein (wo dann der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte ist).