

## Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 8. Woche – diskrete und stetige Verteilungen

### Binomialverteilung

- A1** Es sei  $X$  eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern  $n = 10$  und  $p = 0.3$ . Man ermittle die Wahrscheinlichkeiten bzw. die bedingten Wahrscheinlichkeiten
- (a)  $P(X = 0)$ , (b)  $P(X > 0)$ , (c)  $P(X \geq 9)$ , (d)  $P(X < 2)$ ,
  - (e)  $P(X = 3)$ , (f)  $P(X = 0 | X < 2)$ .
- (g) Überlegen Sie sich einen Anwendungskontext für diese Aufgabe.

### Poisson-Verteilung

- A2** Es sei  $X$  eine mit den Parametern  $n$  und  $p$  binomialverteilte Zufallsgröße. Mittels Grenzübergang zur Poisson-Verteilung ermittle man näherungsweise
- (a) für  $n = 100$  und  $p = 0.05$ :  $P(X = 5)$ ,  $P(X = 50)$ ,
  - (b) für  $n = 50$  und  $p = 0.02$ :  $P(X < 1)$ ,  $P(X = 10)$ ,  $P(X = 1)$ ,
  - (c) für  $n = 30$  und  $p = 0.001$ :  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$ ,  $P(X > 1)$ .

**Hinweis:** Überprüfen Sie zunächst die Gültigkeit der 'Faustregel' in [Bem. 14.46](#).

- A3** An einer Tankstelle kommen zwischen 16.00 und 18.00 Uhr durchschnittlich 2.5 Fahrzeuge pro Minute an. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Minute während dieser Zeit
- (a) kein Fahrzeug,
  - (b) genau ein Fahrzeug,
  - (c) genau zwei Fahrzeuge,
  - (d) mehr als drei Fahrzeuge,
  - (e) weniger als sechs Fahrzeuge eintreffen.

Dabei gehe man davon aus, dass die Anzahl  $A$  der ankommenden Fahrzeuge poissonverteilt ist.

### Exponentialverteilung

- A4** Die Zerfallszeit  $T$  für Polonium kann als eine exponentialverteilte Zufallsgröße angenommen werden. Mittels der Halbwertszeit, die für dieses radioaktive Element 140 Tage beträgt, bestimme man
- (a) den Parameter  $\lambda$  der Exponentialverteilung,
  - (b) die Zeitdauer  $t_0$ , so dass mit einer Wahrscheinlichkeit  $p = 0.95$  ein Zerfall erfolgt.

Bemerkung: Unter Halbwertszeit versteht man diejenige Zeit, in deren Verlauf die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls gleich  $\frac{1}{2}$  ist.

- A5 Zusatz:** Für eine Zufallsgröße  $X$ , die einer Exponentialverteilung mit dem Parameter  $\lambda$  unterliegt, bestimme man für  $t > 0$  und  $\tau > 0$  die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X < t + \tau | X > t).$$

Man interpretiere das Ergebnis.

### Normalverteilung

- A6** Bei der automatischen Abfüllung von 1/2-l-Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen  $V$  als normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 500$  (in  $\text{cm}^3$ ) und  $\sigma = 5$  (in  $\text{cm}^3$ ) angenommen.
- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1/2-l-Milchflasche weniger als 490  $\text{cm}^3$  enthält?
  - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Abfüllung die eingefüllte Milch überläuft, wenn das Volumen einer 1/2-l-Milchflasche 510  $\text{cm}^3$  beträgt?
  - (c) Wie groß muß die tolerierte Abweichung  $\alpha$  (in  $\text{cm}^3$ ) von  $\mu = 500$  sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer zu leeren oder zu vollen Flasche kleiner als 10% ist.
- A7** Der Messfehler  $X$  bei der Bestimmung der Masse eines Körpers werde als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $\mu = 0$  und der Streuung  $\sigma^2 = (60\text{g})^2$  angenommen.
- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der absolute Betrag des Messfehlers  $|X|$  kleiner als 7.2 g ist.
  - (b) Es werden (unabhängig voneinander) 5 Messungen durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei wenigstens einmal das Ergebnis  $|X| < 7.2$  g eintritt?
  - (c) Wie viele Messungen müssten durchgeführt werden, damit mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 für mindestens eine Messung  $|X| < 7.2$  g gilt?

### Summe unabhängiger (normalverteilter) Zufallsgrößen

- A8** Zwei Ohmsche Widerstände werden in Reihe geschaltet. Die Werte  $R_1$  bzw.  $R_2$  für diese Widerstände seien **unabhängig** und normalverteilt mit  $\mu_1 = 500$  (in  $\Omega$ ) und  $\sigma_1 = 10$  (in  $\Omega$ ) bzw.  $\mu_2 = 200$  (in  $\Omega$ ) und  $\sigma_2 = 4$  (in  $\Omega$ ). In welchen Grenzen  $700 - \tilde{\alpha}$  und  $700 + \tilde{\alpha}$  liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% der Gesamtwiderstand?