Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378) Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
8. Woche – diskrete und stetige Verteilungen

Binomialverteilung

A1 Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0.3$. Man ermittle die Wahrscheinlichkeiten bzw. die bedingten Wahrscheinlichkeiten

(a) $P(X = 0)$, (b) $P(X > 0)$, (c) $P(X \geq 9)$, (d) $P(X < 2)$,
(e) $P(X = 3)$, (f) $P(X = 0|X < 2)$.

(g) Überlegen Sie sich einen Anwendungskontext für diese Aufgabe.

Kurzlösung: (a) 0.0282 (b) 0.9718 (c) 0.0001 (d) 0.1493 (e) 0.2668 (f) $0.\overline{189}$.

Poisson-Verteilung

A2 Weisen Sie nach, dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Poisson-Verteilung gleich 1 ist.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, k \in \{0, 1, \ldots\}$$

Kurzlösung: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \ldots = 1$

A3 Es sei X eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße. Mittels Grenzübergang zur Poisson-Verteilung ermittle man näherungsweise

(a) für $n = 100$ und $p = 0.05$: $P(X = 5)$, $P(X = 50)$,
(b) für $n = 50$ und $p = 0.02$: $P(X < 1)$, $P(X = 10)$, $P(X = 1)$,
(c) für $n = 30$ und $p = 0.001$: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X > 1)$.

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Gültigkeit der 'Faustregel' in Bem. 13.45.
Kurzlösung:

(a) 0.1755, $1.9676 \cdot 10^{-32}$ (b) 0.3679, $1.0138 \cdot 10^{-7}$, 0.3679 (c) 0.9704, 0.0291, 0.0004.

A4 An einer Tankstelle kommen zwischen 16.00 und 18.00 Uhr durchschnittlich 2.5 Fahrzeuge pro Minute an. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Minute während dieser Zeit

(a) kein Fahrzeug,

(b) genau ein Fahrzeug,

(c) genau zwei Fahrzeuge,

(d) mehr als drei Fahrzeuge,

(e) weniger als sechs Fahrzeuge eintreffen.

Dabei gehe man davon aus, dass die Anzahl A der ankommenden Fahrzeuge poissonverteilt ist.

Kurzlösung: $\lambda = 2,5$

(a) 0.0821 (b) 0.2052 (c) 0.2565 (d) 0.2424 (e) 0.9580.

Exponentialverteilung

A5 Die Zerfallszeit T für Polonium kann als eine exponentialverteilte Zufallsgröße angenommen werden. Mittels der Halbwertszeit, die für dieses radioaktive Element 140 Tage beträgt, bestimme man

(a) den Parameter λ der Exponentialverteilung,

(b) die Zeitdauer t_0, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0.95$ ein Zerfall erfolgt.

Bemerkung: Unter Halbwertszeit versteht man diejenige Zeit, in deren Verlauf die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Kurzlösung: (a) 0.00495/d (b) $t_0 \approx 605$ Tage.

A6 Für eine Zufallsgröße X, die einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ unterliegt, bestimme man für $t > 0$ und $\tau > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X < t + \tau | X > t).$$

Man interpretiere das Ergebnis.

Kurzlösung: $1 - e^{-\lambda\tau}$.