Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)
9. Woche – Normalverteilung, Grenzwertsatz, Tschebyscheff

Normalverteilung

A1 Bei der automatischen Abfüllung von 1/2-l-Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen V als normalverteilt mit den Parametern $\mu = 500$ (in cm^3) und $\sigma = 5$ (in cm^3) angenommen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1/2-l-Milchflasche weniger als 490 cm^3 enthält?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Abfüllung die eingefüllte Milch überläuft, wenn das Volumen einer 1/2-l-Milchflasche 510 cm^3 beträgt?

(c) Wie groß muß die tolerierte Abweichung α (in cm^3) von $\mu = 500$ sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer zu leeren oder zu vollen Flasche kleiner als 10% ist.

Kurzlösung: (a) 0.0228 (b) 0.0228, (c) $\alpha = 8.2$

A2 Der Messfehler X bei der Bestimmung der Masse eines Körpers werde als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 0$ und der Streuung $\sigma^2 = (60\text{g})^2$ angenommen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der absolute Betrag des Messfehlers $|X|$ kleiner als 7.2 g ist.

(b) Es werden (unabhängig voneinander) 5 Messungen durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei wenigstens einmal das Ergebnis $|X| < 7.2$ g eintritt?

(c) Wie viele Messungen müssten durchgeführt werden, damit mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 für mindestens eine Messung $|X| < 7.2$ g gilt?

Kurzlösung:

(a) $P(-7.2 < X < 7.2) \approx 0.09552$.

(b) T...Anzahl des Ergebnisses $|X| < 7.2$ bei 5 Messungen. $P(T \geq 1) \approx 0.395$.

(c) $n \geq 23$.

Summe unabhängiger (normalverteilter) Zufallsgrößen

A3 Zwei Ohmsche Widerstände werden in Reihe geschaltet. Die Werte R_1 bzw. R_2 für diese Widerstände seien **unabhängig** und normalverteilt mit $\mu_1 = 500$ (in Ω) und $\sigma_1 = 10$ (in Ω) bzw. $\mu_2 = 200$ (in Ω) und $\sigma_2 = 4$ (in Ω). In welchen Grenzen 700-$\tilde{\alpha}$ und 700+$\tilde{\alpha}$ liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% der Gesamtwiderstand?

Kurzlösung: Da R_1 und R_2 normalverteilt und unabhängig sind, gilt für den Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$, dass er auch normalverteilt ist.
$\frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{116}} \approx 2.58$ (= symmetrisches 99%-Quantil der Normalverteilung), also $\tilde{\alpha} \approx 27.787$.

A4 Ein Transformatorenkern bestehe aus 50 Blechen, deren Dicke B normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_B = 0,5$ (in mm) und $\sigma_B = 0,05$ (in mm), sowie 49 Zwischenlagen aus speziellem Papier, dessen Dicke P normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_P = 0,05$ (in mm) und $\sigma_P = 0,02$ (in mm).
Unter der Voraussetzung, dass die Dicken der einzelnen Schichten (sowohl Bleche als auch Papierzwischenlage) **unabhängig** sind, bestimme man

(a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dicke T des Transformatorkerns,

(b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x_1 \leq T \leq x_2$ für $x_1 = 27$ (in mm) und $x_2 = 28$ (in mm) gilt.

Kurzlösung: a) $T \sim N(27.45, 0.1446)$ b) 0.8075

Zentraler Grenzwertsatz & Tschebyscheff

A5 Es nehmen 100 Personen an einer Busreise teil, die mit zwei Bussen mit 60 bzw. 50 Plätzen durchgeführt werden soll. Die beiden Busse starten von zwei verschiedenen Orten aus, und die 100 Reisenden sollen sich zur Abfahrt rein zufällig an einem dieser Orte einfinden. Bestimmen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Plätze in einem der Busse nicht ausreichen. (Tipp: Grenzwertsatz anwenden!)

Kurzlösung: $P(X < 40 \vee X > 50) = 2 - \Phi(2) - \Phi(0.2) \approx 2 - 0.97725 - 0.57926 = 0.44349$.

A6 Mit X_n wird die Anzahl der in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel auftretenden Würfe mit der Augenzahl "Sechs" bezeichnet.

(a) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?

(b) Für $\varepsilon = 0.01$ bestimme man eine Mindestanzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so dass $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0.01\right) \geq 0.5$ gilt, sowohl mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes als auch mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung.

(c) Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ermittle man

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \varepsilon\right).$$

Man nutze Tschebyscheff mit $\varepsilon = k\sigma \Leftrightarrow k = \varepsilon/\sigma$.

Kurzlösung:

(a) Binomialverteilung mit den Parametern n und $p = \frac{1}{6}$

(b) $n_0 = 633$ (GWS von Moivre-Laplace),
$n_0 = 2778$ (Tschebyscheffsche Ungleichung).

(c) 0.

Welche Verteilung verwenden Sie hier? - Sie sollen die Aufgaben nicht lösen.

A7 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brennelement in einem Kernreaktor den Bedingungen einer Qualitätsprüfung nicht genügt, beträgt 0.0002. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) höchstens 2 von 5000,

(b) genau eins von 1000,

(c) keins von 100

dieser Brennelemente die Qualitätsprüfung nicht erfüllen.

Kurzlösung: (a) 0.9197 (b) 0.1637 (c) 0.9802.

A8 Drei Glühbirnen werden zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Ihre Lebensdauer beschreiben drei stochastisch unabhängige Zufallsvariable X_1, X_2, X_3, deren Verteilungen alle die gleiche Verteilungsfunktion besitzen:

$$F(t) = P(X_i < t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine der drei Glühbirnen den Zeitpunkt $t = 9$ "überlebt"?

Kurzlösung: Das Komplementärereignis zum Ereignis

A: Wenigstens eine der drei Glühbirnen "überlebt" den Zeitpunkt $t = 9$

ist offenbar

$\overline{A}$: die Lebensdauer aller drei Glühbirnen beträgt höchstens $t = 9$ Zeiteinheiten.

Und damit $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3$.