Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung)

9. Woche – Grenzwertsatz, Tschebyscheff, 2-dimensionale Zufallsgrößen, Covarianz, Schätzer (erwartungstreu)

Summe unabhängiger (normalverteilter) Zufallsgrößen

A1 Ein Transformatorenkern bestehe aus 50 Blechen, deren Dicke B normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_B = 0,5$ (in mm) und $\sigma_B = 0,05$ (in mm), sowie 49 Zwischenlagen aus speziellem Papier, dessen Dicke P normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_P = 0,05$ (in mm) und $\sigma_P = 0,02$ (in mm).
Unter der Voraussetzung, dass die Dicken der einzelnen Schichten (sowohl Bleche als auch Papierzwischenlage) **unabhängig** sind, bestimme man

(a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dicke T des Transformatorkerns,

(b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x_1 \leq T \leq x_2$ für $x_1 = 27$ (in mm) und $x_2 = 28$ (in mm) gilt.

Kurzlösung: a) $T \sim N(27.45, 0.1446)$ b) 0.8075

Zentraler Grenzwertsatz & Tschebyscheff

A2 Es nehmen 100 Personen an einer Busreise teil, die mit zwei Bussen mit 60 bzw. 50 Plätzen durchgeführt werden soll. Die beiden Busse starten von zwei verschiedenen Orten aus, und die 100 Reisenden sollen sich zur Abfahrt rein zufällig an einem dieser Orte einfinden. Bestimmen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Plätze in einem der Busse nicht ausreichen. (Tipp: Grenzwertsatz anwenden!)

Kurzlösung: $P(X < 40 \vee X > 50) = 2 - \Phi(2) - \Phi(0.2) \approx 2 - 0.97725 - 0.57926 = 0.44349.$

A3 **Zusatz:** Mit X_n wird die Anzahl der in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel auftretenden Würfe mit der Augenzahl "Sechs" bezeichnet.

(a) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?

(b) Für $\varepsilon = 0.01$ bestimme man eine Mindestanzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so dass $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0.01\right) \geq 0.5$ gilt, sowohl mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes als auch mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung.

(c) Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ermittle man

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \varepsilon\right).$$

Man nutze Tschebyscheff mit $\varepsilon = k\sigma \Leftrightarrow k = \varepsilon/\sigma$.

Kurzlösung:

(a) Binomialverteilung mit den Parametern n und $p = \frac{1}{6}$

(b) $n_0 = 633$ (GWS von Moivre-Laplace),
$n_0 = 2778$ (Tschebyscheffsche Ungleichung).

(c) 0.

2-dimensionale Zufallsgrößen

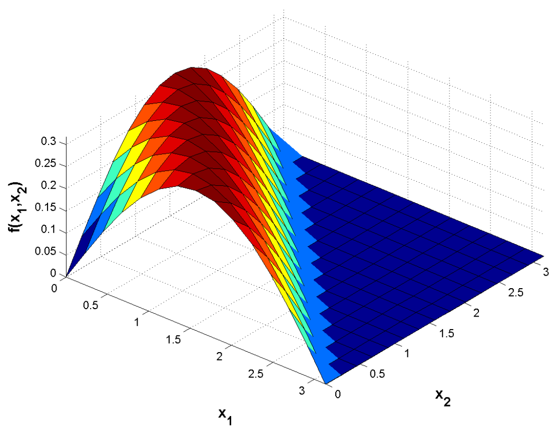
A4 (a) Für welchen Wert der Konstanten c ist

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c\sin(x_1 + x_2), & \text{falls } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \pi \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine zweidimensionale Dichte eines Zufallsvektors (X, Y)?

(b) Berechnen Sie die Dichten und Erwartungswerte der Randverteilungen.

(c) Sind die Zufallsgrößen X_1, X_2 voneinander **unabhängig**?



Hinweis: In Analogie zur diskreten Randverteilung, s. VL 14.6, ist die **Randverteilung** einer stetigen 2-dimensionalen Zufallsgröße (X, Y) die Verteilung der Zufallsgröße X (bzw. Y) mit $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'$ und der **Randdichte** $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dy$ (analog für die Randverteilung von Y).

Kurzlösung:

(a) $c = 1/\pi$

(b) Randdichten: $f_X(x) = \frac{\cos(x)+1}{\pi}$, analog $f_Y(y) = \frac{\cos(y)+1}{\pi}$
Erwartungswert:

$$E(X) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$$

(c) Wären die Zufallsgrößen unabhängig, so müsste gelten $f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$. das ist hier nicht der Fall. Also abhängig!

A5 **Zusatz:** Die zweidimensionale Zufallsgröße (X, Y) besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \frac{1}{16\pi} \exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{(t_1-3)^2}{4} + \frac{(t_2+2)^2}{16}\right)\right] \quad (-\infty < t_1, t_2 < \infty).$$

Man bestimme

(a) die Wahrscheinlichkeitsdichten f_X, f_Y,

(b) die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$,

(c) die Varianzen $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$,

(d) und die Kovarianz $\mathrm{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Hinweis:
$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ und $\frac{1}{16\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$ und eindim. Normalvert..

Kurzlösung:

(a) $f_X(t_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t_1-3)^2}{4}}$, $\quad f_Y(t_2) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t_2+2)^2}{16}}$

(b) $E(X) = 3$, $E(Y) = -2$ (c) $\mathrm{var}(X) = 4$, $\mathrm{var}(Y) = 16$

(d) $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Varianz und Covarianz und Korrelationskoeffizient

A6 Gegeben ist die Kovarianzmatrix des Vektors zweier Zufallsgrößen $\underline{X} = (X_1, X_2)$

$$\mathrm{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = \begin{pmatrix} 2.8 & -0.6 \\ -0.6 & 1.2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie $\mathrm{Var}(X_1), \mathrm{Var}(X_2)$ sowie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$ an.

Kurzlösung: $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = 2.8, \rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\cdot\mathrm{Var}(X_2)}} = \ldots.$

A7 **Zusatz: Kovarianzmatrix in zweidimensionaler Normalverteilung**
Aufgabe 6 nutzend lässt sich die Kovarianzmatrix C zweier (möglicherweise korrelierter normalverteilter) Zufallsgrößen $\underline{X} = (X_1, X_2)$ mit Varianzen σ_i, $i = 1, 2$ (und Erwartungswerten m_i) wie folgt schreiben

$$C = \mathrm{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie (die letzte Form nutzend) C^{-1} sowie $(\underline{x} - \underline{m})C^{-1}(\underline{x} - \underline{m})'$ an mit $\underline{x} = (x_1, x_2)$ und $\underline{m} = (m_1, m_2)$ und vergleichen Sie mit Systemtheorie Teil 4 Folien 342 und 405.

Kurzlösung: $\det(C) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$, $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$

A8 **Summe abhängiger Zufallsgrößen**

Seien X, Y zwei Zufallsgrößen mit $\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)$ und $\mathrm{cov}(X, Y)$.

(a) Ermitteln Sie die Varianz der abgeleiteten Zufallsgröße $Z = X + Y$ für den Fall, dass X, Y **korreliert** sind. **Hinweis:** Verwenden Sie die Definition der Varianz.

(b) Ermitteln Sie die Varianz der abgeleiteten Zufallsgröße $Z = X - Y$ für den Fall, dass X, Y **unkorreliert** sind.

Kurzlösung:

(a) $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$

(b) $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

A9 Die ist eine Aufgabe, um das 'Sehen' zu üben.

Gegeben sind die sogenannten Streudiagramme (scatter plots) von 2-dimensionalen Zufallsgrößen, Bild 1 und 2. Die folgenden Schritte sind für beide Bilder zu bearbeiten:

(a) Schätzen Sie (ausnahmsweise mal durch 'Hingucken') den Erwartungswert der Zufallsgrößen X, Y, also $E(X)$ und $E(Y)$.

(b) Zeichnen Sie in das Bild ein Koordinatensystem mit den Achsen $x - E(X), y - E(Y)$ (heißt: den Koordinatenursprung in den Erwartungswert legen).

(c) Schätzen Sie, ob der Erwartungswert des (um die Erwartungswerte bereinigten) Produktes der Zufallsgrößen (sprich die Kovarianz, $\mathrm{cov}(X, Y) = E((x - E(X) \cdot (y - E(Y)))$ < 0, in etwa $= 0$ oder > 0 ist.
<u>Hinweis:</u> Das Produkt ist im 1. und 3. Quadranten positiv und im 2. und 4. Quadranten negativ. Es geht also darum, abzuschätzen, was überwiegt.

(d) In welchem der beiden Fälle (Bild 1 oder 2) sind die Zufallsgrößen X, Y (in etwa) unkorreliert?

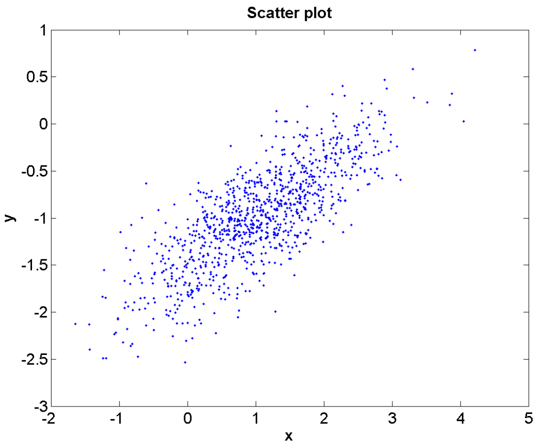


Bild 1

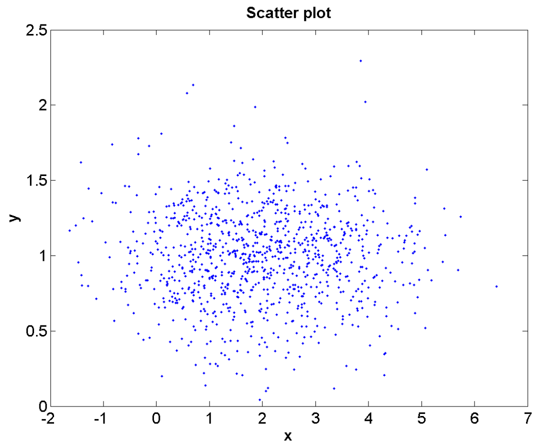


Bild 2

Kurzlösung:

(a) Bild 1: $E(X) \approx 1$ und $E(Y) \approx -1$; Bild 2: $E(X) \approx 2$ und $E(Y) \approx 1$.

(b) Bild 1: neuer Koordinatenursprung in $(1, -1)$; Bild 2: neuer Koordinatenursprung in $(2, 1)$.

(c) Bild 1: $\operatorname{cov}(X, Y) > 0$; Bild 2: $\operatorname{cov}(X, Y) \approx 0$.

(d) Bild 1: X, Y korreliert; Bild 2: X, Y (in etwa) unkorreliert, da cov $\neq 0$ bzw. ≈ 0.

Schätzer

A10 **Zusatz:** Vollziehen Sie die Herleitung des **erwartungstreuen Varianz-Schätzers** Bsp. 14.59 nach und wenden Sie dies zur Schätzung der Varianz aus der Stichprobe von 3 unabhängigen Messungen $\{x_1, x_2, x_3\} = \{3, 5, 7\}$ an.

Kurzlösung:

$n = 3, \bar{x} = 5, S^2 =?$