Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
10. Woche – PDGL

PDGL als gewöhnliche DGL in einer Variablen

A1 Von den folgenden partiellen Differentialgleichungen bestimme man, falls möglich die Lösungen, die den angegebenen Zusatzbedingungen genügen:

a) $z_{yy} = 2$ mit Anfangsbedingungen: $z(x,0) = 1\,,\; z_y(x,0) = x\,;$

Zusatz b) $z_{xy} = 2x + 2y$ mit Randbedingungen: $z(x,0) = x\,,\; z(0,y) = y^2\,;$

PDGL durch Substitution zu gewöhnlicher DGL

A2 Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$z_{xy} + z_x = x\,y\;,$$

nachdem man sie durch die Substitution $p = z_x$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt hat.

Lineare PDGL erster Ordnung

A3 Vervollständigen Sie den Lückentext: Bei Methode 1 aus VL 15.1.1 werden für das zweidimensionale Problem $u(x,y)$ anstelle von x,y neue Koordinaten $\ldots,\ldots$ eingeführt. Von diesen wird eine, z.B. ξ so gewählt, dass ihr Gradient $(\xi_x,\ldots)$ stets senkrecht zum Vektor $(a,b)'$ ist, wobei a,b die $\ldots$ des linearen Teils der PDGL sind. Auf diese Weise wird erreicht, dass die PDGL in den neuen Koordinaten nur noch die Ableitung nach $\ldots$ Variablen enthält und mit Methoden gewöhnlicher $\ldots$ gelöst werden kann.

Formulieren Sie den Satz für ein dreidimensionales Problem $u(t,x,y)$.

A4
(a) u vs. $\tilde{u}$: In Bsp. 15.2 a wird einerseits $\tilde{u}(\xi,\eta)$ und andererseits $u(x,y)$ verwendet. Geben Sie $\tilde{u}(1,1)$ und $u(1,1)$ an.

(b) Machen Sie die Probe, ob die gefundene allgemeine Lösung $u(x,y)$ tatsächlich die PDGL in 15.2.a erfüllt.

(c) Veranschaulichen Sie (3D-Graphik z.B. mit Matlab) die verschiedenen Lösungen von Bsp. 15.2 a für $C(t) = 0, 1, t$.

(d) Wie sähe die allgemeine Lösung von 15.2 a) aus, wenn $\eta_x = 0$ und $\eta_y = 1$ gewählt worden wäre. Ist die Lösung von c) mit $C(t) = 1$ in den Lösungen von d) enthalten?

A5 Folgende partielle Differentialgleichungen sind unter Verwendung der angegebenen Substitutionen zu lösen:

a) $az_x + bz_y = 1 \quad (a \neq 0)$ mit $\eta = x\;,\quad \xi = ay - bx\;;$

b) $w_x + w_y + w_z = 0$ mit $\eta = x\;,\quad \xi = y - x\;,\quad \zeta = z - x\;.$

Lineare PDGL erster Ordnung: Ansatz $\xi(x,y) = F(\frac{x}{y})$

A6 Man bestimme die allgemeine Lösung der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$x\,z_x + y\,z_y = 0\;.$$