Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. S. Franz (Z21 238, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (S7a 403, HA 32291)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2
10. Woche – PDGL

PDGL als gewöhnliche DGL in einer Variablen

A1 Von den folgenden partiellen Differentialgleichungen bestimme man, falls möglich die Lösungen, die den angegebenen Zusatzbedingungen genügen:

a) $z_{yy} = 2$ mit Anfangsbedingungen: $z(x,0) = 1\,,\ z_y(x,0) = x\,;$

Zusatz b) $z_{xy} = 2x + 2y$ mit Randbedingungen: $z(x,0) = x\,,\ z(0,y) = y^2\,;$

PDGL durch Substitution zu gewöhnlicher DGL

A2 Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$z_{xy} + z_x = x\,y\ ,$$

nachdem man sie durch die Substitution $p = z_x$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt hat.

Lineare PDGL erster Ordnung

A3 Vervollständigen Sie den Lückentext: Bei Methode 1 aus VL 15.1.1 werden für das zweidimensionale Problem $u(x,y)$ anstelle von x, y neue Koordinaten $\ldots, \ldots$ eingeführt. Von diesen wird eine, z.B. η so gewählt, dass ihr Gradient $(\eta_x, \ldots)$ stets senkrecht zum Vektor $(a,b)'$ ist, wobei a, b die ... des linearen Teils der PDGL sind. Auf diese Weise wird erreicht, dass die PDGL in den neuen Koordinaten nur noch die Ableitung nach ... Variablen enthält und mit Methoden gewöhnlicher ... gelöst werden kann.

Formulieren Sie den Satz für ein dreidimensionales Problem $u(t,x,y)$.

A4
(a) u vs. $\tilde{u}$: In Bsp. 15.2 a wird einserseits $\tilde{u}(\xi,\eta)$ und andererseits $u(x,y)$ verwendet. Geben Sie $\tilde{u}(1,1)$ und $u(1,1)$ an.

(b) Machen Sie die Probe, ob die gefundene allgemeine Lösung $u(x,y)$ tatsächlich die PDGL in 15.2.a erfüllt.

(c) Veranschaulichen Sie (3D-Graphik z.B. mit Matlab) die verschiedenen Lösungen von Bsp. 15.2 a für $C(t) = 0, 1, t$.

(d) Wie sähe die allgemeine Lösung von 15.2 a) aus, wenn $\xi_x = 0$ und $\xi_y = 1$ gewählt worden wäre. Ist die Lösung von c) mit $C(t) = 1$ in den Lösungen von d) enthalten?

A5 Folgende partielle Differentialgleichungen sind unter Verwendung der angegebenen Substitutionen zu lösen:

a) $az_x + bz_y = 1 \quad (a \neq 0)$ mit $\xi = x\ ,\quad \eta = ay - bx\ ;$

b) $w_x + w_y + w_z = 0$ mit $\xi = x\ ,\quad \eta = y - x\ ,\quad \zeta = z - x\ .$