

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/2 (inkl. Kurzlösung) 10. Woche – PDGL

PDGL als gewöhnliche DGL in einer Variablen

- A1** Von den folgenden partiellen Differentialgleichungen bestimme man, falls möglich die Lösungen, die den angegebenen Zusatzbedingungen genügen:

a) $z_{yy} = 2$ mit Anfangsbedingungen: $z(x, 0) = 1$, $z_y(x, 0) = x$;

Zusatz b) $z_{xy} = 2x + 2y$ mit Randbedingungen: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$;

Kurzlösung:

(b) $z_x = 2xy + y^2 + c_1(x) \rightarrow z = x^2y + xy^2 + \int c_1(x)dx + c_2(y)$

Randbedingungen $\rightarrow z = x^2y + xy^2 + x + y^2$

PDGL durch Substitution zu gewöhnlicher DGL

- A2** Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$z_{xy} + z_x = xy,$$

nachdem man sie durch die Substitution $p = z_x$ auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt hat.

Kurzlösung:

$$p(x, y) = \tilde{c}_1(x) e^{-y} - x + xy$$

$$z = \int p(x, y) dx = c_1(x) e^{-y} + \frac{x^2}{2}(y - 1) + c_2(y)$$

Lineare PDGL erster Ordnung

- A3** Vervollständigen Sie den Lückentext: Bei Methode 1 aus [VL 15.1.1](#) werden für das zweidimensionale Problem $u(x, y)$ anstelle von x, y neue Koordinaten $\dots, \dots$ eingeführt. Von diesen wird eine, z.B. η so gewählt, dass ihr Gradient $(\eta_x, \dots)$ stets senkrecht zum Vektor $(a, b)'$ ist, wobei a, b die $\dots$ des linearen Teils der PDGL sind. Auf diese Weise wird erreicht, dass die PDGL in den neuen Koordinaten nur noch die Ableitung nach $\dots$ Variablen enthält und mit Methoden gewöhnlicher $\dots$ gelöst werden kann.

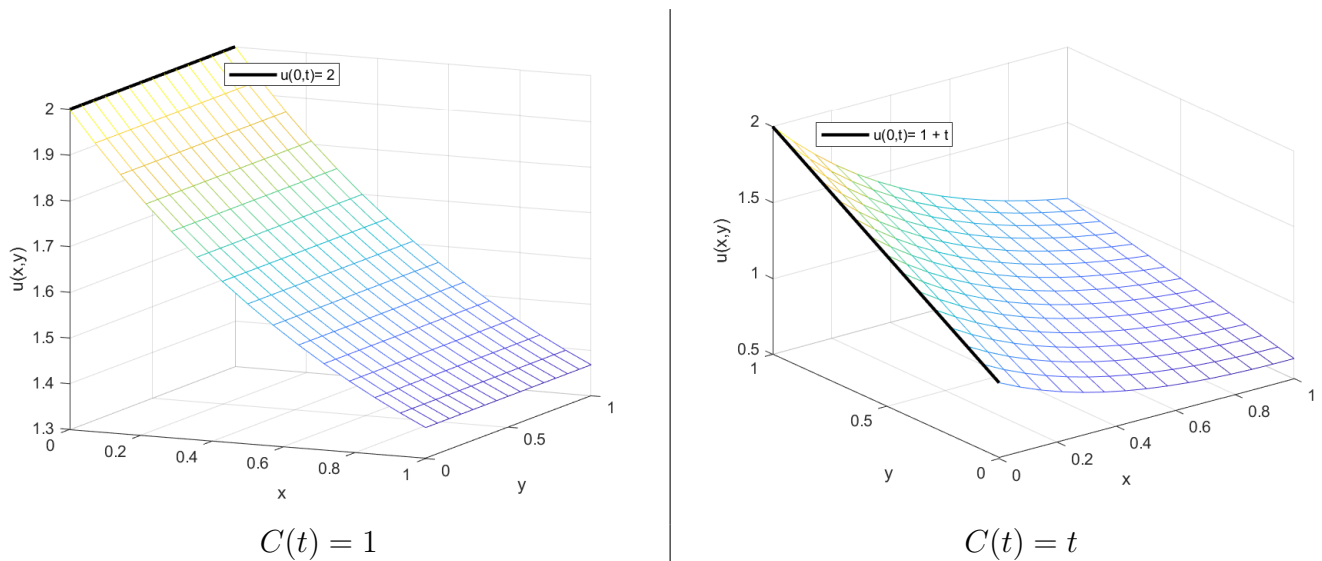
Formulieren Sie den Satz für ein dreidimensionales Problem $u(t, x, y)$.

- A4** (a) u vs. $\tilde{u}$: In [Bsp. 15.2 a](#) wird einerseits $\tilde{u}(\xi, \eta)$ und andererseits $u(x, y)$ verwendet. Geben Sie $\tilde{u}(1, 1)$ und $u(1, 1)$ an.
- (b) Machen Sie die Probe, ob die gefundene allgemeine Lösung $u(x, y)$ tatsächlich die PDGL in 15.2.a erfüllt.
- (c) Veranschaulichen Sie (3D-Graphik z.B. mit Matlab) die verschiedenen Lösungen von [Bsp. 15.2 a](#) für $C(t) = 0, 1, t$.
- (d) Wie sähe die allgemeine Lösung von 15.2 a) aus, wenn $\xi_x = 0$ und $\xi_y = 1$ gewählt worden wäre. Ist die Lösung von c) mit $C(t) = 1$ in den Lösungen von d) enthalten?

Kurzlösung:

(a) u vs. $\tilde{u}$: $\tilde{u}(1, 1) = 1 + C(1)e^{-1} \neq u(1, 1) = 1 + C(0)e^{-1}$.

(c) Nutze z.B. [Matlab-file](#)



(d) $u(x, y) = 1 + C_d(x - y)e^{-y}$. Ja, mit $C_d(t) = \dots$

- A5** Folgende partielle Differentialgleichungen sind unter Verwendung der angegebenen Substitutionen zu lösen:

a) $az_x + bz_y = 1 \quad (a \neq 0) \quad \text{mit} \quad \xi = x, \quad \eta = ay - bx;$

b) $w_x + w_y + w_z = 0 \quad \text{mit} \quad \xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x.$

Kurzlösung:

(b) $w = \varphi(y - x, z - x).$